

## CAPÍTULO 3

### UN SISTEMA GENERADOR DE CURVAS DE LORENZ JERÁRQUICAS

JOSÉ MARÍA SARABIA  
MARTA PASCUAL

*Departamento de Economía  
Universidad de Cantabria*

#### RESUMEN

*En un estudio reciente, Sarabia, Castillo y Slottje (1999) proponen un método general para obtener familias jerárquicas de curvas de Lorenz, partiendo de una curva generadora inicial. La familia tiene propiedades generales de ordenación, es altamente flexible y los parámetros se interpretan en términos de medidas de desigualdad. En el presente trabajo, se proponen dos familias jerárquicas de curvas de Lorenz, construidas siguiendo el método anterior. La primera de ellas es la llamada de Pareto Generalizada y la segunda es la basada en la función de pérdida asimétrica LINEX. Se realiza un análisis empírico a partir de los datos propuestos por Casas, Callealta y Núñez (1996) para el caso nacional y Shorrocks (1983) para el internacional.*

*PALABRAS CLAVE: Desigualdad, Encuestas Básicas de Presupuestos Familiares, Índices de Atkinson y de Gini Generalizados, Curva de Lorenz..*

*TEMA: Modelización de datos utilizando familias de distribuciones*

#### 1. INTRODUCCIÓN

La desigualdad económica es un concepto complejo cuyo análisis entraña no pocas dificultades. Durante décadas se ha tratado de analizar la desigualdad en la distribución de la renta y son muchas las medidas de desigualdad que se han propuesto en la literatura económica. Asimismo, se ha producido un creciente interés y desarrollo de la teoría estadística para inferir la dominación de una distribución (renta, salarios, etc.) sobre otra. Para este fin, se han utilizado diversos criterios, tales como la dominación estocástica de primer y segundo

orden, la dominación de Lorenz, la dominación estocástica de tercer orden (aversión a la desigualdad en las rentas bajas), etc. Algunas referencias son Atkinson (1970), Sen (1973), Dasgupta, Sen y Starret (1973), Marshall y Olkin (1979), Beach y Davidson (1986), Arnold (1987), Bishop, Formby y Thistle (1992), Sarabia, Castillo y Slottje (1999). Todos los criterios citados anteriormente suponen principios bastante generales tales como el principio de transferencias de Pigou-Dalton, anonimidad, eficiencia, equidad, etc. No obstante, cuando adoptamos una visión objetiva de la desigualdad de la renta no debemos olvidar su incidencia sobre el nivel de bienestar social. Sen (1973) analiza un interesante enfoque para la medición del bienestar que nos lleva a una serie de funciones de utilidad interrelacionadas.

Típicamente con las comparaciones, se busca establecer rankings de desigualdad y de bienestar social. Desafortunadamente, no siempre es posible establecer ordenaciones sin ambigüedad. Por ejemplo, ordenaciones basadas en la dominación estocástica de primer orden dan lugar a un porcentaje de ordenaciones de entre el 75 y el 78 por ciento de todas las posibles comparaciones entre parejas, mientras que ordenaciones basadas en la dominación estocástica de segundo orden (curvas de Lorenz generalizadas) dan lugar a un porcentaje de entre el 82 y 84 por ciento de todas las parejas.

Se utilizan dos hipótesis de trabajo. La primera hipótesis establece que, eligiendo una adecuada forma funcional paramétrica (es decir, que cumpla una serie de propiedades deseables relacionadas con su rango, forma, parámetros, fundamentación teórica, manejabilidad analítica, etc. (Casas et al., 1996)), se pueden inferir muchas de las propiedades relativas a la desigualdad. La segunda de las hipótesis de trabajo postula que existen determinadas ordenaciones estocásticas congruentes con principios básicos de desigualdad, que dan lugar a rankings con un menor grado de ambigüedad.

El hecho de elegir una forma funcional para la distribución de rentas puede resultar restrictivo a priori. En consecuencia, ¿por qué debemos imponer una forma funcional sobre los datos y calcular los índices de desigualdad basándonos en los parámetros de esa distribución particular cuando podemos obtenerlos directamente a partir de los datos empíricos?

Las razones son varias. En primer lugar, utilizando aproximaciones paramétricas de la curva de Lorenz podemos sintetizar miles de observaciones estimando algunos parámetros. Además hay que tener en cuenta el coste informático de almacenar toda la información y el coste en términos de tiempo, que en caso de no considerar una forma paramétrica, es considerable. Por otra parte, la información contenida en una función de densidad es enorme y nos

puede proporcionar claves para determinar el por qué de cada nivel de desigualdad. Asimismo, podríamos estudiar la curtosis, simetría, cuantiles, etc. Todo ello enriquece la información disponible sobre los datos. En segundo lugar, cuando planteamos una forma paramétrica ganamos flexibilidad, sin perjuicio de poder hacer comparaciones tanto a nivel agregado como individual. Además, esta búsqueda de funciones teóricas que se ajusten a la distribución observada de rentas puede ser justificada desde varios puntos de vista (Casas et al. (1996)):

El trabajo empírico en el campo de rentas personales se enfrenta en general con datos en forma agrupada, bien porque vengan ya así, o bien por su inmanejabilidad cuando son muy numerosos. Especificando una distribución teórica que se aproxime a la distribución real de frecuencias, se obtiene un instrumento válido para interpolar dentro de cada clase de rentas.

Muchos indicadores de desigualdad se definen en términos de rentas individuales. Cuando se trabaja con datos agrupados para calcular el valor de tales medidas es necesario incluir hipótesis adicionales para las rentas dentro de las clases. Si se obtiene una buena y adecuada distribución probabilística, se pueden obtener los indicadores de desigualdad a partir de los parámetros estimados, sin necesidad de admitir igualdad de rentas dentro de las clases.

A partir de una distribución probabilística determinada, se pueden obtener relacionadamente distintas medidas de desigualdad, lo que resulta muy útil para interpretar dichas medidas.

Si tenemos una distribución probabilística que refleje fielmente el comportamiento de las rentas personales mediante parámetros cuyos valores pueden ser pronosticados, se pueden realizar simulaciones que incorporen elementos de la distribución de rentas personales. Asimismo se pueden construir modelos cuyo objetivo sea predecir variables específicas. Se debe tener en cuenta que muchas variables regionales están relacionadas con la distribución de rentas (por ejemplo bienes de consumo, demanda de vivienda, demanda de transporte,...).

La utilización de información derivada de encuestas para el estudio de la distribución personal de la renta, hace difícil el trabajo del análisis de la misma sobre todo cuando nos encontramos discontinuidades en la distribución difícilmente justificables por el propio comportamiento de las rentas en estudio. Un modelo teórico para el estudio de la distribución puede ser una solución adecuada a este problema.

Cuando estudiamos la desigualdad existente en la distribución se puede producir una cierta distorsión provocada por las ponderaciones del muestreo. De este modo, cuando analizamos diferentes indicadores de desigualdad, las ordenaciones a que éstos conducen pueden parecer poco estables. En estos casos, un modelo teórico para la distribución de las rentas, puede suavizar estas diferencias y proporcionar ordenaciones generalmente más estables.

Cuando elegimos una adecuada forma funcional podemos analizar de manera eficiente diversas propiedades estadísticas y podemos comprobar la bondad de ajuste de una forma rigurosa y rápida. Obviamente, la forma de la curva de Lorenz depende de la especificación de la función de distribución subyacente y son muchas las formas funcionales propuestas en la literatura económica. De ahí que el problema de la especificación funcional de la curva de Lorenz siga siendo un activo campo de investigación. Algunas propuestas son: Kakwani y Podder (1973), Rasche et al. (1980), Pakes (1981), Aggarwal y Singh (1984), Gupta (1984), Arnold (1986), Arnold et al. (1987), Villaseñor y Arnold (1989), Basmann et al. (1990), Ortega et al. (1991), Chotikapanich (1993), Holm (1993), Ryu y Slottje (1996), Sarabia (1997) y Sarabia et al. (1997).

El trabajo se estructura de la siguiente manera. La sección 2 introduce la teoría básica sobre curvas de Lorenz. La sección 3 presenta la familia de curvas de Lorenz de Pareto que se utilizan como instrumento en el estudio de la desigualdad. En la sección 4 se proponen nuevas formas funcionales para la curva de Lorenz, apoyándose en las propiedades deseables de dichas curvas, y en las diversas propuestas existentes.

En cuanto al análisis empírico, se han utilizado dos importantes conjuntos de datos. En una primera aproximación se han utilizado datos corregidos de la distribución de la renta en España, y datos internacionales. Los resultados serán interpretados a la luz de las consideraciones de tipo teórico obtenidas con anterioridad.

## 2. RESULTADOS PREVIOS

### *DEFINICIÓN:*

*Se considera la curva de Lorenz de acuerdo con la definición de Gastwirth (1971). Para una función de distribución  $F_x(x)$  con soporte sobre un subconjunto de los números reales positivos, y con esperanza finita, se define la curva de Lorenz como:*

$$L_x(p) = \mu^{-1} \int_0^1 F_x^{-1}(x) dx; \quad 0 \leq p \leq 1$$

donde:

$$L_x(p) = \mu^{-1} \int_0^1 F_x^{-1}(x) dx; \quad 0 \leq p \leq 1$$

*TEOREMA:*

Sea  $L(p)$  una función definida y continua en el intervalo  $[0; 1]$ , con segunda derivada  $L''(p)$ . Entonces  $L(p)$  es una curva de Lorenz si y sólo si se verifica:

$$L(0) = 0; \quad L(1) = 1; \quad L'(0^+) \geq 0; \quad L''(p) \geq 0 \quad \forall p \in (0,1)$$

Esta caracterización de la curva de Lorenz se atribuye a Gaffney y Anstis por Pakes (1986).

*DEFINICIÓN:*

Sea  $L_x(p)$  una curva de Lorenz. Llamamos curva de Lorenz Generalizada  $LG_x(p)$ , a:

$$LG_x(p) = \mu L_x(p)$$

Es decir, la curva de Lorenz Generalizada se obtiene multiplicando las ordenadas de la curva de Lorenz por la renta media, lo que supone un cambio de escala en ésta.

### 3. LA FAMILIA DE CURVAS DE LORENZ DE PARETO GENERALIZADA

En esta parte del trabajo nos planteamos la generación de rentas mediante la familia de curvas de Lorenz de Pareto Generalizada, propuesta por Sarabia, Castillo y Slottje (1999). Se buscan formas funcionales que se adapten adecuadamente a la forma de las distribuciones empíricas de las rentas y que verifiquen ciertas propiedades de interés. La familia analizada se ajusta adecuadamente y es estable respecto a la forma funcional elegida. Se utilizan los datos corregidos de las Encuestas Básicas de Presupuestos Familiares, propuestos por Casas, Callealta y Núñez (1996).

Se han utilizado dos familias paramétricas de la jerarquía, que coinciden con las propuestas de Ortega et al. (1991) y Rasche et al. (1980), con el fin de analizar la sensibilidad de los resultados respecto a la forma funcional. Se comienza con una curva de Lorenz inicial y se va construyendo una familia con un número creciente de parámetros. A partir de los resultados obtenidos, se estudian diversos casos de dominación estocástica, así como sus implicaciones en la evolución del bienestar social. Asimismo se analiza la desigualdad mediante diversos juicios de valor, incluyendo índices de pobreza y medidas del nivel de desarrollo.

De entre las diversas formas de modelizar datos sobre la distribución de la renta dentro de un contexto paramétrico (funciones de distribución, funciones de densidad, de percentiles, función de elasticidad de renta, etc.), las curvas de Lorenz y las curvas de Lorenz generalizadas proporcionan una forma alternativa con ciertas ventajas.

Entre los modelos paramétricos propuestos en la literatura destacamos las propuestas de Kakwani y Podder (1973), Rasche et al. (1980), Pakes (1981), Arnold (1983), Gupta (1984), Villaseñor y Arnold (1989), Basmann et al. (1990), Ortega et al. (1991), Chotikapanich (1993), Ryu y Slotlje (1996) y Sarabia et al. (1999).

### 3.1. Metodología

En un trabajo reciente, Sarabia, Castillo y Slotlje (1999) proponen un método general que permite construir una jerarquía de curvas de Lorenz con un número creciente de parámetros. El método comienza con una curva de Lorenz inicial  $L_0(p)$ . A partir de esta curva se considera la jerarquía de curvas:

$$L_1(p; \alpha) = p^\alpha L_0(p), \quad (\alpha > 1) \text{ ó } (0 \leq \alpha < 1, \quad L_0'''(p) \geq 0)$$

$$L_2(p; \gamma) = L_0(p)^\gamma, \quad \gamma > 1$$

$$L_3(p; \alpha, \gamma) = p^\alpha L_0(p)^\gamma, \quad (\alpha, \gamma > 1) \text{ ó } (0 \leq \alpha < 1, \quad \gamma \geq 1, \quad L_0'''(p) \geq 0)$$

Se puede probar que las expresiones  $L_1(p; \alpha)$  y  $L_2(p; \gamma)$  son siempre curvas de Lorenz genuinas. La curva  $L_3(p; \alpha, \gamma)$  surge combinando  $L_1(p; \alpha)$  y  $L_2(p; \gamma)$ . En algunos casos se precisan condiciones de regularidad relativas a la derivada tercera. Como prueban los autores anteriores, existen un gran número de situaciones donde las curvas están ordenadas respecto de los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$ , lo que proporciona a la jerarquía un especial atractivo. Además, los nuevos parámetros que se incorporan a la jerarquía pueden interpretarse en términos de elasticidades de la curva inicial.

### 3.2. La familia de curvas de Lorenz de Pareto

La familia de curvas propuesta comienza con la curva de Lorenz de la distribución clásica de Pareto:

$$L_0(p) = L_0(p; k) = 1 - (1 - p)^k, \quad 0 < k \leq 1$$

Puesto que  $L_0'(p) \geq 0$ , podemos aplicar los resultados anteriores con toda generalidad. Consecuentemente, podemos considerar la familia paramétrica de curvas de Lorenz:

$$L_1(p; k, \alpha) = p^\alpha [1 - (1-p)^k] \quad \alpha \geq 0$$

$$L_2(p; k, \gamma) = [1 - (1-p)^k]^\gamma, \quad \gamma \geq 1$$

$$L_3(p; k, \alpha, \gamma) = p^\alpha [1 - (1-p)^k]^\gamma, \quad \alpha \geq 0, \quad \gamma \geq 1$$

Dicha familia de curvas de Lorenz recibe el nombre de Pareto Generalizada. En la familia anterior se reconocen algunas propuestas de la literatura de curvas de Lorenz. La familia  $L_1(p; k, \alpha)$  coincide con la propuesta de Ortega et al. (1991). La familia  $L_2(p; k, \gamma)$  se corresponde con la propuesta de Rasche et al. (1980) a partir de una modificación de la familia de Kakwani y Podder (1973). Si  $k = 1$ ,  $L_2(p; k, \gamma)$  se convierte en una curva de Lorenz potencial, con función de distribución de soporte acotado. La familia  $L_3(p; k, \alpha, \gamma)$  sigue siendo una curva de Lorenz cuando  $0 < \gamma < 1$ .

### 3.3. Breve referencia metodológica sobre los datos

Como se ha indicado anteriormente, los datos utilizados corresponden a la distribución de la renta “per cápita” disponible de España, propuestos por Callealta, Casas y Núñez (1996), dentro del trabajo “Distribución Personal de la Renta en España”, dirigido por Bernardo Pena. Los datos recogen las distribuciones de la renta derivadas de las Encuestas Básicas de Presupuestos Familiares, y compatibilizadas con los agregados deducidos a partir de las Contabilidades Nacionales en diversas categorías: nivel nacional, Comunidades Autónomas, categorías socioprofesionales y clases de hábitat.

Las declaraciones de ingresos de las familias en las EBPF están muy por debajo de la realidad. Esto se pone de manifiesto simplemente comparándolos con los resultados sobre gasto y ahorro. Además no se debe olvidar que los resultados están basados en una muestra y, por tanto, están sujetos a los errores de muestreo.

Una vez detectada la ocultación en los datos de renta, dichos autores proceden a un proceso de corrección mediante una tasa de ocultación progresiva. Los datos han sido corregidos siguiendo unas hipótesis razonables aunque lógicamente discutibles. Si bien es cierto que los errores probables cometidos al utilizar dichas hipótesis para la corrección, son menores que los errores que se producirían con los datos no corregidos.

Por otra parte, se utilizan los datos de ingresos y no los del gasto. Estadísticamente los datos sobre el gasto son bastante fiables y es cierto que el gasto podría servir como aproximación a la renta, sin embargo, esto es aceptable para los niveles bajos de renta en los que la propensión marginal al consumo es próxima a uno, pero muy discutible para los niveles altos de renta, desvirtuándose por tanto el análisis.

La información básica procede de las Encuestas Básicas de Presupuestos Familiares realizadas en 1973, 1980 y 1990. El ámbito poblacional es idéntico en las EBPF de 1973-74, 1980-81 y 1990-91, es decir, las unidades de análisis son los hogares privados que residen en viviendas familiares principales, investigándose todas las personas que resultan ser miembros del hogar. El ámbito geográfico es casi común en las tres encuestas, con la única excepción de la exclusión de Ceuta y Melilla en la EBPF de 1973-74. El ámbito temporal es en las tres encuestas un periodo continuo de doce meses, idéntico para las EBPF de 1980-81 y 1990-91 y con un desfase de un trimestre para la de 1973-74. En ninguno de los tres casos este periodo coincide con el año de calendario que comienza el 1 de enero y termina el 31 de diciembre. Sin embargo, se considera que los datos de las EBPF se refieren al año en el que se realizan la mayor parte de las observaciones. Esta asignación es más fácil de admitir para las encuestas de 1990-91 y 1980-81 que comenzaron en abril, y bastante más discutible para la de 1973-74 que comenzó en julio.

Para la clasificación de los hogares por categorías socioprofesionales se toman los ingresos de cada una de las personas que componen el hogar, se elige a una de ellas como sustentador principal, y luego se tienen en cuenta un conjunto de características de esta persona para clasificarla en una categoría socioprofesional, que es a su vez la que se asigna al hogar del que forma parte. Entre las características del sustentador principal que se recogen en las EBPF cabe destacar:

- Relación con la actividad económica
- Ocupación, profesión o puesto de trabajo
- Situación profesional
- Nivel de instrucción
- Rama de actividad del establecimiento donde trabaja

De este modo, el hogar en su conjunto se clasifica en la categoría socio-profesional que corresponde al sustentador principal del mismo. Después de los correspondientes ajustes, la clasificación por categorías socioprofesionales es la siguiente:



- a) Empresarios agrarios con asalariados, y directores, gerentes y personal titulado agrario (EACA).
- b) Empresarios agrarios sin asalariados (EASA).
- c) Resto de activos agrarios (RAA).
- d) Empresarios no agrarios con asalariados y profesionales liberales con o sin asalariados (NACA).
- e) Empresarios no agrarios sin asalariados y trabajadores independientes (NASA).
- f) Directivos, gerentes y cuadros superiores no agrarios y profesionales de las Fuerzas Armadas (CSNA).
- g) Cuadros medios y resto del personal administrativo, comercial y técnico (CMNA).
- h) Contra maestres, capataces y jefes de grupo no agrarios (JNA).
- i) Obreros no agrarios y resto de trabajadores de los servicios (ONA).
- j) Activos no clasificables, incluso parados y no activos (OTRO).

En cuanto a la clasificación por Tamaño de Hábitat, se consideran cuatro grupos:

- I. Municipios de hasta 2000 habitantes (TIPO 1).
- II. Municipios de 2001 hasta 10000 habitantes (TIPO 2).
- III. Municipios de 10001 hasta 50000 habitantes, excepto capitales (TIPO 3SC)
- IV. Municipios de más de 50000 habitantes y capitales (TIPO 4CC)

Para nuestro estudio hemos utilizado los datos correspondientes a la renta “per capita” disponible en 1973, 1980 y 1990, en pesetas constantes del año base 1986, teniendo en cuenta las aclaraciones anteriores.

Los datos internacionales aparecen en Shorrocks (1983). La información procede del estudio realizado por Jain (1975). Los 19 países incluidos son especialmente interesantes porque corresponden a grupos con diferente grado de desigualdad. Los datos estaban divididos en 11 grupos de ingresos, correspondientes a los percentiles 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 y 95.

#### 3.4. *Medidas de desigualdad, pobreza y desarrollo*

El análisis y la medición de la desigualdad a través de índices ha tenido un gran desarrollo durante las últimas décadas. Las medidas de desigualdad permiten la ordenación completa de diferentes distribuciones de renta según el

grado de desigualdad registrado, si bien tal y como se ha puesto de manifiesto anteriormente, pueden ser incompatibles con determinados criterios. Los criterios seguidos para la selección de las medidas de desigualdad pueden sintetizarse en una formulación lo más simple posible pero sin olvidar que dichas medidas han de verificar unos axiomas básicos como son el axioma de simetría o imparcialidad, el principio de transferencias de Pigou-Dalton, el axioma de normalización y el de continuidad. A continuación se incluyen los índices utilizados:

### 3.4.1 Índice de Gini

En el caso de la familia de curvas de Lorenz de Pareto Generalizada el índice de Gini viene dado por:

$$G_0(k) = \frac{1-k}{1+k}$$

$$G_1(k, \alpha) = 1 - 2[\beta(\alpha + 1, 1) - \beta(\alpha + 1, k + 1)]$$

$$G_2(k, \gamma) = 1 - \frac{2}{k} \left[ \beta\left(\frac{1}{k}, \gamma + 1\right) \right]$$

$$G_3(k, \alpha, \gamma) = 1 - 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(i - \gamma)}{\Gamma(i + \gamma) \Gamma(-\gamma)} \beta(\alpha + 1, ki + 1)$$

donde  $\beta()$  y  $\Gamma()$  representan la función Beta y Gamma, respectivamente.

### 3.4.2 Índice de Theil de orden 1

$$T_1 = E \left[ \frac{X}{\mu} \log \left( \frac{X}{\mu} \right) \right]$$

### 3.4.3 Índices de Atkinson de órdenes

K=0.5 (con escasa aversión a la desigualdad),  
 k=1 (con una aversión media a la desigualdad) y  
 k=2 (con alta aversión a la desigualdad).

#### 3.4.4 Indicador de desarrollo

$$D_{it} = \mu_{it} (1 - G_{it}(\theta))$$

donde  $\mu_{it}$  y  $G_{it}$  representan, respectivamente, la renta media y el índice de Gini de la comunidad  $i$ -ésima en el año  $t$ . Este indicador fue propuesto por Sen (1973) y puede utilizarse como una función de bienestar.

#### 3.4.5 Índice de pobreza

Como indicador se ha elegido la mitad de la renta nacional media familiar. Este valor puede obtenerse fácilmente a partir de la curva de Lorenz, teniendo en cuenta su relación con la función de distribución subyacente.

### 3.5. Dominación estocástica

Como se ha indicado anteriormente, los datos utilizados corresponden a la distribución de la renta “per capita” disponible en España, propuestos por Casas et al. (1996) en diversas categorías: nivel nacional, Comunidades Autónomas, categorías socioprofesionales y clases de hábitat.

En orden a investigar si la distribución de la renta durante los años 1973 a 1990 ha experimentado una mejora en el nivel de bienestar nacional hemos obtenido las curvas de Lorenz Generalizadas (Shorrocks, 1983; Thistle 1989) en los tres periodos considerados. Como aspecto a destacar, señalar que las medidas de desigualdad, pobreza y desarrollo respecto de las curvas  $L_1(p, k, \alpha)$  y  $L_2(p, k, \gamma)$  apenas se diferencian. Esto prueba la estabilidad de las dos formas funcionales.

En el Gráfico 1 (Anexo 2), se muestran las curvas de Lorenz Generalizadas a nivel nacional para los tres periodos considerados, de acuerdo con los modelos  $L_1(p, k, \alpha)$  y  $L_2(p, k, \gamma)$ . Como puede observarse, para ambas familias paramétricas, la curva de Lorenz generalizada de 1990 domina completamente a la de 1980 y ésta a la de 1973, con lo que puede hablarse propiamente de una disminución de la desigualdad a nivel nacional en el periodo considerado. Puesto que se produce una dominación de la curva de un periodo con la del otro, se puede concluir que en términos del nivel de vida renta la situación ha mejorado. Una de las ventajas de trabajar con este tipo de curvas es que el porcentaje de comparaciones no resueltas es mucho menor. Esta misma propiedad se cumple con la familia de Pareto Generalizada.

En los gráficos 2, 3 y 4 (Anexo 2), se muestran las curvas de Lorenz generalizadas de cada una de las clases de hábitat en 1973, 1980 y 1990, respectivamente. En todos los casos, los municipios con menos de 10000 habitantes presentan un grado de desigualdad mayor. No obstante, si analizamos la evolución de la desigualdad de estos municipios desde 1973, observamos que en todos los niveles se ha producido una disminución de la desigualdad, siendo mayor esta disminución en la década de los 80.

### 3.6. Evolución de la desigualdad y la pobreza

Para cuantificar la desigualdad existente en la distribución de la renta per cápita, hemos obtenido los indicadores de desigualdad antes mencionados para cada uno de los instantes temporales analizados y para las curvas  $L_1(p, k, \alpha)$  y  $L_2(p, k, \gamma)$ . Los valores de los diferentes índices de desigualdad considerados se muestran en el ANEXO 1.

Como primer aspecto vamos a comparar los índices de Gini teóricos con los muestrales que aparecen en el trabajo de Callealta, Casas y Núñez (1996). En prácticamente la totalidad de los casos los valores teóricos son ligeramente inferiores a los correspondientes muestrales. Este hecho es consistente con el modelo teórico de Chakravarty y Eichhorn (1994) que relaciona muestra y población en el caso de medidas de desigualdad simétricas y que veri...quen el principio de transferencias de Pigou-Dalton.

Si atendemos al índice de Gini, el dato básico para España es 0.347 en 1990, lo que supone una disminución del 9.3 por ciento durante el periodo analizado. Dicha desigualdad se ha visto reducida en todas las Comunidades Autónomas durante el periodo 73-90, excepto en Baleares y Cataluña, con tasas de variación del 5 y 3.1 por ciento, respectivamente. Hay que señalar que estas Comunidades se encuentran entre las de mayor nivel de renta en 1990, situándose en los puestos quinto y segundo, respectivamente. Las cuatro Comunidades donde más se ha reducido el índice de Gini fueron Aragón, Castilla-León, Galicia y Cantabria.

En lo referente al umbral de pobreza, la estimación para España se sitúa en un 19.6 por ciento lo que supone una reducción de un 17.8 por ciento desde 1973. Los mayores niveles de pobreza durante 1990 se sitúan en Extremadura, Castilla La Mancha y Andalucía. Las Comunidades donde más se ha reducido el nivel de pobreza durante el periodo 73-90 han sido, en este orden, Navarra, Castilla-León, Asturias y Andalucía.

Las Comunidades que durante 1990 han alcanzado mayores valores en el índice de desarrollo han sido Navarra, Cataluña, Madrid, País Vasco y Baleares.

Por otro lado, las Comunidades de Castilla-León, Navarra, Extremadura y Andalucía han experimentado los mayores niveles de crecimiento del índice de desarrollo durante el periodo 73-90. Tal y como hemos señalado anteriormente, mediante el índice de desarrollo podemos comparar el nivel de vida-venta de cada Comunidad con el nacional. Las Comunidades que en 1973 tenían un mayor nivel de vida-venta que el nacional fueron Aragón, Asturias, Baleares, Cantabria, Cataluña, Madrid, País Vasco y La Rioja, si consideramos  $L_1(p, k, \alpha)$ . Si tenemos en cuenta  $L_2(p, k, \gamma)$ , a esta lista habría que añadir la Comunidad Valenciana. Las Comunidades con menor nivel de vida-venta fueron Andalucía y Extremadura.

En 1980, existe unanimidad en ambas familias y las Comunidades que tenían un mayor nivel de vida-venta que el nacional fueron Aragón, Asturias, Baleares, Cantabria, Castilla-León, Cataluña, Madrid, Comunidad Valenciana, Navarra, País Vasco y La Rioja. En este año, las Comunidades con menor nivel de vida-venta fueron Extremadura y Castilla La Mancha. En 1990, las Comunidades con un nivel de vida-venta superior al nacional son para ambas familias Aragón, Baleares, Cataluña, Madrid, País Vasco y La Rioja y las de menor nivel de vida-venta fueron de nuevo Extremadura y Castilla La Mancha.

Si analizamos el índice de Gini para completar la comparación anterior entre la desigualdad de la renta en las Comunidades Autónomas y la nacional, obtenemos que en 1973, las Comunidades más desiguales que España fueron Andalucía, Aragón, Castilla-León, Castilla La Mancha, Madrid y Navarra. En 1980 fueron Andalucía, Canarias y Madrid, y en 1990, Andalucía, Canarias, Castilla-La Mancha, Madrid, Murcia y Ceuta y Melilla.

A continuación, analizamos la desigualdad en la distribución de la renta per cápita de las Categorías Socioprofesionales definidas. En líneas generales se puede apreciar una evolución continuada hacia una menor desigualdad en la distribución de la renta. En cuanto a las categorías que presentan un nivel de vida-venta superior al nacional son los “Empresarios no agrarios con asalariados y profesionales liberales con o sin asalariados” (NACA), los “Directivos, gerentes y cuadros superiores no agrarios y profesionales liberales de las Fuerzas Armadas” (CSNA), los “Cuadros medios y resto del personal administrativo, comercial y técnico” (CMNA) y los “Contramaestres, capataces y jefes de grupo no agrarios” (JNA) en 1973, los “Empresarios agrarios con asalariados, y directores, gerentes y personal titulado agrario” (EACA), los “Empresarios no agrarios con asalariados y profesionales liberales con o sin asalariados” (NACA), los “Directivos, gerentes y cuadros superiores no agrarios y profesionales liberales de las Fuerzas Armadas” (CSNA), los “Cuadros medios y resto del personal administrativo, comercial y técnico” (CMNA) y los “Contramaestres, capataces y jefes de grupo no agrarios” (JNA) en 1980 y los

“Empresarios agrarios con asalariados, y directores, gerentes y personal titulado agrario” (EACA), los “Empresarios no agrarios con asalariados y profesionales liberales con o sin asalariados” (NACA), los “Directivos, gerentes y cuadros superiores no agrarios y profesionales liberales de las Fuerzas Armadas” (CSNA), los “Cuadros medios y resto del personal administrativo, comercial y técnico” (CMNA) y los “Contramaestres, capataces y jefes de grupo no agrarios” (JNA) en 1990 para las dos familias analizadas.

Las categorías con mayor desigualdad según el índice de Gini son los “Directivos, gerentes y cuadros superiores no agrarios y profesionales liberales de las Fuerzas Armadas” (CSNA) y los “Activos no clasificables, incluso parados y no activos” (OTRO) en 1973, los “Empresarios agrarios con asalariados, y directores, gerentes y personal titulado agrario” (EACA) y los “Activos no clasificables, incluso parados y no activos” (OTRO) en 1980 y los “Empresarios agrarios con asalariados, y directores, gerentes y personal titulado agrario” (EACA) y los “Empresarios no agrarios con asalariados y profesionales liberales con o sin asalariados” (NACA) en 1990.

En cuanto a las cuatro clases de hábitat consideradas, tanto en 1973 como en 1980 y 1990 sólo los “Municipios de más de 50000 habitantes y capitales” (TIPO4CC) tuvieron un nivel de vida renta mayor que el nacional. Aunque desde 1973 a 1980 se produjo un ligero aumento de la desigualdad en los “Municipios de hasta 2000 habitantes” (TIPO1), en términos globales podemos afirmar que desde 1973 hasta 1990 se ha producido una disminución de la desigualdad en todas las clases de hábitat.

### 3.7. Conclusiones

En esta parte de la investigación se analiza la desigualdad en la distribución personal de la renta en España, durante los años 1973, 1980 y 1990 usando los datos corregidos de las EBPF (Encuestas Básicas de Presupuestos Familiares), propuestos por Casas et al. (1996). Se trabaja con la jerarquía de curvas de Lorenz de Pareto Generalizada, propuesta por Sarabia, Castillo y Slottje (1999). La desigualdad se analiza mediante diversos juicios de valor, usando índices de Atkinson y de Gini generalizados, así como diversos criterios de dominación estocástica. Se incluyen índices de pobreza, así como medidas del nivel de desarrollo.

Como instrumento metodológico, se propone una jerarquía de curvas que no presenta algunos de los inconvenientes de las formas funcionales existentes (Basmann et al., 1990; Ryu y Slottje, 1996). Las estimaciones obtenidas de las diferentes medidas de desigualdad y desarrollo, son comparables con las

obtenidas mediante otros métodos alternativos. Con objeto de estudiar la sensibilidad de los resultados respecto a la forma funcional, se ha trabajado con dos familias biparamétricas de la jerarquía, que coinciden con las propuestas de Ortega et al. (1991) y Rasche et al. (1980). Los resultados son muy similares lo que prueba la estabilidad de los modelos.

#### 4. UNA NUEVA CLASE DE CURVAS DE LORENZ

Tal y como se ha puesto de manifiesto anteriormente, algunos de los modelos de curvas propuestos presentan diversos inconvenientes. Una primera cuestión general es la relativa a la bondad de ajuste. Algunas de las curvas propuestas ajustan correctamente la parte central de los datos, mientras que fallan en las colas. Otras curvas presentan el problema opuesto (Basmann et al. (1990)). En este sentido, hay que destacar que algunas formas funcionales dan lugar a índices de Gini que no verifican las cotas de Gastwirth (1972), y en consecuencia deben de ser cuestionadas como aproximaciones a la curva de Lorenz. Otro importante problema es la convexidad de la curva. Existen formas que no son convexas en algunos tramos, y deben ser nuevamente cuestionadas como curvas de Lorenz genuinas.

En esta parte de la investigación se presenta una nueva clase de curvas de Lorenz que no presenta los inconvenientes anteriores. Puesto que las correspondientes expresiones de los índices de Gini son complicadas, se plantean algunas cotas de los mismos a partir de las curvas de Lorenz.

Motivado por la naturaleza asimétrica de la curva de Lorenz (Arnold, 1986), en este trabajo se propone una familia jerárquica de curvas, construida a partir de la función de pérdida LINEX (LINear EXponential):

$$L(\theta, \delta) = b \left\{ e^{a(\theta - \delta)} - a(\theta - \delta) - 1 \right\}$$

donde  $a$  es un parámetro de forma, y  $b > 0$  es un factor de proporcionalidad.

Esta función fue introducida por Varian (1975) y ha sido ampliamente utilizada en estadística bayesiana (Zellner, (1986), Parsian (1990), Cain y Janssen (1995)). La función de pérdida LINEX se reduce a pérdida cuadrática para valores pequeños de  $a$ , y si  $a$  es positivo, se considera que la sobreestimación es más problemática que una subestimación de la misma magnitud.

Basándonos en la definición poblacional de Curva de Lorenz propuesta por Gastwirth (1971), construimos una familia jerárquica de curvas con un número creciente de parámetros, de acuerdo con el método propuesto por Sarabia, Castillo y Slotje (1999). Esta familia es altamente flexible y las condiciones de convexidad son fáciles de comprobar.

Consideramos inicialmente la curva de Lorenz biparamétrica,

$$L_0(p) = L_0(p; a, b) = k_{a,b}^{-1}(e^{ap} - bp - 1),$$

donde

$$k_{a,b} = e^a - b - 1$$

y la única restricción para que sea una curva de Lorenz genuina es que  $a \geq b$ . Esta familia se construye normalizando la función de pérdida LINEX.

Además debemos considerar dos importantes casos particulares:

- a) La línea de equidistribución  $L(p) = p$ , que se obtiene haciendo  $a = 0$ .
- b) La curva de Lorenz exponencial que se obtiene haciendo  $b = 0$ : Esta familia ha sido utilizada por Chotikapanich (1993) y Sarabia, Castillo y Slotje (2001):

$$L(p; a) = k_a^{-1}(e^{ap} - 1),$$

donde

$$k_a = e^a - 1 \text{ y } a \geq 0.$$

La curva de Lorenz biparamétrica básica  $L_0(p; a, b)$ , puede interpretarse como una combinación lineal de un conjunto infinito de curvas de Lorenz potenciales  $L_j(p) = p^j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  cuyas ponderaciones decrecen cuando  $j$  decrece. Es decir:

$$L_0(p; a, b) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j(a, b) p^j$$

donde:

$$w_j(a, b) = \begin{cases} \frac{a-b}{k_{a,b}} & \text{si } j=1 \\ \frac{a^j}{j! k_{a,b}} & \text{si } j=2, 3, \dots \end{cases}$$

Puesto que  $L_0'''(p; a, b) = a^3 e^{ap} / k_{a,b} > 0$ , aplicando los resultados anteriores, podemos construir la familia paramétrica de curvas de Lorenz:

$$L_1(p; \alpha, a, b) = p^\alpha k_{a,b}^{-1}(e^{ap} - bp - 1), \quad \alpha \geq 0, \quad a \geq b$$

$$L_2(p; \gamma, a, b) = k_{a,b}^{-1}(e^{ap} - bp - 1)^\gamma, \quad \gamma \geq 1, \quad a \geq b$$

$$L_1(p; \alpha, \gamma, a, b) = p^\alpha k_{a,b}^{-1}(e^{ap} - bp - 1)^\gamma, \quad \alpha \geq 0, \quad \gamma \geq 1, \quad a \geq b$$



4.1. *Medidas de desigualdad*

Un aspecto importante en el estudio de las curvas de Lorenz es la obtención de las correspondientes medidas de desigualdad, especialmente el índice de Gini. En el caso de la curva de Lorenz generadora de nuestra familia, este índice viene dado por la expresión:

$$G_0(a, b) = \frac{a(e^a + 1) - 2(e^a - 1)}{ak_{a,b}}$$

En el caso de la curva biparamétrica  $L_1(p; \alpha, a, b)$  el valor de este índice viene dado por:

$$G_1(\alpha, a, b) = 1 - \frac{2}{k_{a,b}} \left[ {}_1F_1(\alpha + 1; \alpha + 2; a) \frac{1}{\alpha + 1} - \frac{b}{\alpha + 2} - \frac{1}{\alpha + 1} \right]$$

donde

$${}_1F_1(\alpha + 1; \alpha + 2; a)$$

representa la función hipergeométrica:

$${}_1F_1(a; b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt$$

donde  $b > a$ .

Otra medida de desigualdad importante a tener en cuenta es el índice propuesto por Yitzhaki (1983) que viene definido por:

$$K_r(L) = 1 - r(r+1) \int_0^1 (1-p)^{r-1} L(p) dp$$

donde  $r > 0$ . En el caso de nuestra curva generadora el índice de Yitzhaki viene dado por la expresión:

$$K_r(L_0) = 1 - \frac{r+1}{k_{a,b}} \left[ {}_1F_1(1; r+1; a) - \frac{b}{r+1} - 1 \right],$$

y en general, para la familia  $L_1(p; \alpha, a, b)$  tenemos:

$$K_r(L_1) = 1 - \frac{r(r+1)\beta(\alpha+1, r)}{k_{a,b}} \left[ {}_1F_1(\alpha+1; \alpha+r+1; a) - \frac{b(\alpha+1)}{\alpha+r+1} - 1 \right]$$

Las expresiones de estos índices para las familias  $L_2(p; \gamma, a, b)$  y  $L_3(p; \alpha, \gamma, a, b)$  son más complicados.

Afortunadamente, si los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  y  $\gamma$  han sido estimados previamente, podemos obtener sus valores utilizando programas usuales de cálculo numérico.

## 4.1.1 Cotas del índice de Gini

Las expresiones de los índices de Gini asociados a las curvas  $L_1(p; \alpha, a, b)$ ,  $L_2(p; \gamma, a, b)$  y  $L_3(p; \alpha, \gamma, a, b)$  son complicadas. Por tanto, resulta especialmente interesante conocer algunas cotas de los mismos en función del índice de Gini de la curva inicial  $L_0(p; a, b)$ . En la literatura es fácil encontrar cotas para los índices de Gini en el caso que la función de distribución subyacente  $F$  sea conocida. Sin embargo, no es usual encontrar cotas de los índices de Gini a partir de las curvas de Lorenz.

Proponemos un teorema general, que es válido para cualquier jerarquía de curvas de Lorenz construidas según el método comentado anteriormente. Denotamos por  $G_0$ ,  $G_1(\alpha)$ ,  $G_2(\gamma)$  y  $G_3(\alpha, \gamma)$  los índices de Gini asociados a  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$ , respectivamente. Se cumple el siguiente teorema:

*TEOREMA:*

*Se verifican las siguientes acotaciones para los índices de Gini de la jerarquía:*

- 1)  $G_3(\alpha, \gamma) \geq 1 - 2 \left[ \frac{1 - 2G_2(\gamma)}{2(2\alpha + 1)} \right]^{1/2}$
- 2)  $G_2(\gamma) \geq G_0$
- 3)  $G_1(\alpha) \geq 1 - 2 \left[ \frac{1 - G_0}{2(2\alpha + 1)} \right]^{1/2}$

Las cotas 1 y 3 se alcanzan si y sólo si  $L_0$  es una curva de Lorenz de tipo potencial, es decir:

$$L_0(p) = p^\alpha, \text{ para algún } \alpha \geq 1$$

Otras nuevas acotaciones pueden ser obtenidas, al conocerse  $L_0(p)$ . En el caso de la jerarquía de curvas LINEX, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left[ \int_0^1 L_3(p; \alpha, \gamma) dp \right]^2 \leq \int_0^1 p^{2\alpha} dp * \int_0^1 L_0(p)^{2\gamma} dp$$

obtenemos:

$$G_1(\alpha) \geq 1 - \frac{2i_{a,b}^{1/2}}{(2\alpha + 1)^{1/2}}$$

donde:

$$i_{a,b} = \frac{9a + 6a^2 - 12b + 6a^2b + 2a^2b^2 - 12ae^a + 12be^a - 12abe^a + 3ae^{2a}}{6a^2k_{a,b}^2}$$

#### 4.2. Funciones de población

En esta sección se estudian las funciones de población de la jerarquía propuesta. La curva de Lorenz es invariante ante cambios de escala, y en consecuencia la correspondiente función de distribución dependerá de un nuevo parámetro, que coincide con la media poblacional  $\mu$ . Las funciones de cuantiles de la jerarquía Lineal Exponencial vienen dadas por:

$$X_0(p; a, b, \mu) = \frac{\mu}{k_{a,b}} (ae^{ap} - b)$$

$$X_1(p; \alpha, a, b, \mu) = \frac{\mu}{k_{a,b}} \left[ p^\alpha (ae^{ap} - b) + \alpha p^{\alpha-1} (ae^{ap} - bp - 1) \right]$$

$$X_2(p; \gamma, a, b, \mu) = \frac{\mu}{k_{a,b}^\gamma} \gamma (e^{ap} - bp - 1)^{\gamma-1} (e^{ap} - b)$$

$$X_3(p; \alpha, \gamma, a, b, \mu) = \mu k_{a,b}^\gamma \left[ (e^{ap} - bp - 1)^\gamma \left( \frac{\gamma p^\alpha (ae^{ap} - b)}{e^{ap} - bp - 1} + \alpha p^{\alpha-1} \right) \right]$$

Estas fórmulas son útiles para la obtención de información explícita sobre la forma de la función de distribución de rentas. De esta forma podemos obtener las correspondientes funciones de distribución. Para la primera familia de la jerarquía, la función de distribución correspondiente viene dado por:

$$F_0(x; a, b, \mu) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq l(a, b, \mu) \\ \frac{1}{a} \log \left[ \frac{1}{a} \left( b + \frac{k_{a,b}}{\mu} x \right) \right] & \text{si } l(a, b, \mu) \leq x \leq u(a, b, \mu) \\ 1 & \text{si } x \geq u(a, b, \mu) \end{cases}$$

donde

$$l(a, b, \mu) = \mu(a - b)/k_{a,b} \text{ y } u(a, b, \mu) = \mu(ae^a - b)/k_{a,b}$$

Con objeto de implementar un posible método de estimación de  $F_0(x; a, b, \mu)$  basado en el método de momentos generalizado, incluimos los tres primeros momentos. Si  $\mu(\alpha) = E_{F_0}(X^\alpha)$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}\mu(1) &= \mu \\ \mu(2) &= \frac{\mu^2}{2k_{a,b}^2} (ae^{2a} - 4be^a - a + 4b + 2b^2) \\ \mu(3) &= \frac{\mu^3}{6k_{a,b}^3} (2a^2e^{3a} - 9abe^{2a} + 18b^2e^a - 2a^2 + 9ab - 24b^2)\end{aligned}$$

#### 4.3. Orden de Lorenz

Tal y como se ha puesto de mani...esto anteriormente, el análisis de la dominación estocástica es un aspecto importante en el estudio de las distribuciones de renta. Por ello se ha analizado el orden de Lorenz en esta jerarquía de familias. Comenzaremos con la familia uniparamétrica  $L(p; a)$  que está ordenada con respecto al parámetro  $a$ .

##### LEMA

Sea  $L(p; a) = k_a^{-1}(e^{ap} - 1)$ , donde  $k_a = e^a - 1$  y  $a \geq 0$ . Si  $a_1 \geq a_2 > 0$ , entonces  $L(p; a_1) \leq L(p; a_2)$ .

##### LEMA

Sea  $L_0(p; a, b) = k_{a,b}^{-1}(e^{ap} - bp - 1)$  donde  $k_{a,b} = e^a - b - 1$  y  $a \geq b$ . Si  $b_1 \geq b_2$ , entonces  $L_0(p; a, b_1) \leq L_0(p; a, b_2) \quad \forall a$  y  $0 < p < 1$

#### 4.4. Estimación

Supongamos que queremos estimar el vector de parámetros  $(\alpha, \gamma, a, b)$  de la curva general  $L_3$ : El método puede adaptarse fácilmente a la estimación de las curvas  $L_1$  y  $L_2$ : Haremos una estimación secuencial en el sentido de que primero obtendremos las estimaciones para los parámetros  $(a; b)$  de  $L_0$  que serán utilizados en las estimaciones de  $L_1, L_2$  y  $L_3$ . Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra de tamaño  $n$  de datos de ingresos. Las observaciones consisten en  $n$  parejas de puntos  $(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)$ , donde  $p_i = i/n$ ;  $q_i = s_i/s_n$  y  $s_i = x_{1:n} + \dots + x_{i:n}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ ; siendo  $x_{i:n}$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ ; el estadístico de orden  $i$ .

4.4.1 Estimación de  $L_0$ 

Para estimar los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $\mu$ , un método plausible consiste en resolver el siguiente sistema:

$$\mu = m(1); \quad \mu \frac{a-b}{k_{a,b}} = X_{1:n}; \quad \mu \frac{ae^a - b}{k_{a,b}} = X_{n:n}$$

donde

$$m(1); X_{1:n} \text{ y } X_{n:n}$$

representan respectivamente la media, el mínimo y el máximo muestrales. De esta forma, el valor de  $b$  viene dado por:

$$b = \frac{ae^a - ze^a + z}{1-z}$$

donde

$$z = X_{m}/m(1).$$

De esta forma obtenemos:

$$\frac{z(e^a - a - 1) - a(1 - e^a)}{e^a(1 - a) - 1} = \frac{X_{1:n}}{m(1)}$$

que sólo depende de  $a$  y por tanto, esta ecuación tiene solución única. Una vez obtenido el estimador del parámetro  $a$ , los estimadores de  $\mu$  y de  $b$  vienen dados por las expresiones anteriores.

4.4.2 Estimación de  $L_3$ 

Escribimos

$$L_3(p; \alpha, \gamma, a, b)$$

como

$$L_3(p; \alpha, \gamma, a, b) = p^\alpha L_0(p; a, b)^\gamma$$

Proponemos la estimación mediante mínimos cuadrados haciendo mínima la cantidad:

$$u(\alpha, \gamma, a, b) = \sum_{i=1}^n [q_i - p_i^\alpha - L_0(p_i; a, b)^\gamma]^2,$$

o de modo alternativo:

$$\tilde{u}(\alpha, \gamma, a, b) = \sum_{i=1}^n [\log q_i - \alpha \log p_i - \gamma \log L_0(p_i; a, b)]^2$$

#### 4.5. Resultados empíricos

En esta sección se presentan los resultados de la estimación de la curva de Lorenz y el índice de Gini. Tal y como se ha comentado antes, los datos utilizados son los de Shorrocks (1983).

Con objeto de establecer una comparación, se ha ajustado el modelo uniparámetro básico  $L(p; a)$  junto con la curva triparamétrica  $L_1(p; \alpha, a, b)$ .

Los parámetros han sido estimados mediante mínimos cuadrados no lineales, de acuerdo con los métodos establecidos en la sección anterior. Asimismo se analizan varias medidas de error. El error mínimo cuadrático (MSE), que viene dado por:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [q_i - L(p_i; \hat{\theta})]^2$$

el error absoluto medio (MAE):

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |q_i - L(p_i; \hat{\theta})|$$

y el error máximo absoluto (MAX):

$$MAX = \max_{i=1,2,\dots,n} |q_i - L(p_i; \hat{\theta})|$$

donde

$$L(p_i; \hat{\theta})$$

representa la curva de Lorenz estimada previamente. Se puede concluir que los resultados empíricos aportados en este estudio indican que ambas funciones, aunque simples y fáciles de estimar, son muy satisfactorias en el ajuste de los datos. Finalmente, y como medida de adecuación de los modelos a los datos, se han analizado las cotas de Gastwirth inferiores (GL) asociadas de los diferentes países. Estas vienen dadas por:

$$GL = 1 - \sum_{j=1}^{k-1} (p_j - p_{j-1})(q_j + q_{j-1})$$

donde

$$p_0 = q_0 = 0$$

y

$$p_{k+1} = q_{k+1} = 1.$$

La cota superior no es posible calcularla, puesto que se desconocen los límites de los intervalos de ingresos, el ingreso medio de cada intervalo y el ingreso medio global.

Los resultados obtenidos son los siguientes: Las estimaciones del índice de Gini basadas en la curva de Lorenz Exponencial difieren de las estimaciones de la curva de Lorenz Linex no más de 0.03 en 16 de los 19 países, siendo la mayoría de las diferencias de 0.01 o menos. Existen tres países: Dinamarca, Holanda y Nueva Zelanda, cuyo índice de Gini se encuentra ligeramente por debajo de la cota inferior de Gastwirth. Esto puede ser un indicio de falta de adecuación del modelo exponencial  $L(p; a)$  a los datos de esos tres países. Si nos fijamos ahora en los índices de Gini calculados a partir de la curva LINEX del tipo  $L_1(p; \alpha, a, b)$ , este inconveniente deja de existir. Esto significa una mayor flexibilidad de la curva en el ajuste de los datos.

## 5. BIBLIOGRAFÍA<sup>1</sup>

- ARNOLD, B.C. (1983). Pareto Distributions. *International Cooperative Publishing House, Fairland, MD.*
- ATKINSON, A. (1970). On the Measurement of Inequality. *Journal of Economic Theory*, 2, 244-263.
- ATKINSON, A. (1975). *The Economics of Inequality*. Oxford University Press. Oxford.
- BASMANN, R. L., HAYES, K.J., y SLOTTJE, D.J. (1991). The Lorenz Curve and the Mobility Function. *Economics Letters* 35, 105-111.
- BEACH, C.M., y DAVIDSON, R. (1986). Distribution-Free Statistical Inference with Lorenz Curves and Incomes Shares. *Review of Economic Studies*, 50, 723-764.
- BEACH, C., CHOW, K., FORMBY, J., y SLOTSVE, G. (1994). Statistical Inference for Decile Means. *Economics Letters*, 45, 161-167.
- BISHOP, J., FORMBY, J., y THISTLE, P. (1991). Rank Dominance and International Comparisons of Income Distributions. *European Economic Review*, 35, 1399-1409.
- BISHOP, J., FORMBY, J., y THISTLE, P. (1992). Convergence of the South and Non-South Income Distributions, 1969-1979. *American Economic Review*, 82, 262-272.
- BLACKORBY, C, y DONALDSON, D. (1978). Measures of Relative Equality and Their Meaning in Terms of Social Welfare. En D.J. Slottje (Ed.), *Journal of Economic Theory*, 18, 59-80.
- CAIN, M, y JANSSEN, C. (1995). Real Estate Price Prediction Under Asymmetric Loss. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 47, 401-414.
- CALLEALTA, F.J., CASAS, J.M., y NÚÑEZ, J. (1996). Distribución de la Renta per capita disponible en España: Descripción, Desigualdad y Modelización. *Distribución Personal de la Renta en España*, Cap. 5, B. Pena (director). Pirámide. Madrid.

<sup>1</sup> Además de las referencias incluidas en el texto se añaden otras referencias consultadas

- CASAS, J.M., HERRERÍAS, R., y NÚÑEZ, J.J. (1997). Familias de formas funcionales para estimar la curva de Lorenz. *Anales de Economía Aplicada, Actas IV Reunión de Asepelt-España*.
- CASTILLO, E., HADI, A.S., y SARABIA, J.M. (1998). Method for Estimating Lorenz Curves. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 27, 2037-2063.
- CHAKRAVARTY, S.R. y EICHHRON, W. (1994). Measurement of Income Inequality: Observed versus True Data. *Models and Measurement of Welfare and Inequality*, W. Eichhron Editor. Springer-Verlag, Berlín.
- COWELL, F. (1979). *Measuring Inequality*, Philip Allan, Oxford.
- DAGUM, C. (1990). On the Relationship between Income Inequality Measures and Social Welfare Functions. *Journal of Econometrics* 43, 91-102.
- DASGUPTA, P., SEN, A., y STARRETT, D. (1973). Notes on the Measurement of Inequality. *Journal of Economic Theory*, 6, 180-187.
- DAVIES, J. y HOY, M. (1995). Making Inequality Comparisons when Lorenz Curves Intersect. *American Economic Review*, 85, 980-986.
- ESTEBAN GARCÍA, J., LÓPEZ RODRÍGUEZ, M.I. y RUÍZ PONCE, F. (2000). Una Revisión de los Sistemas Generadores y Modelos de Probabilidad Descriptivos de la Distribución de la Renta. *Estudios de Economía Aplicada*, 14, 47-72.
- ESTRUCH MANJÓN, A. (1996). *Desigualdad y Política Redistributiva. Una estimación de la incidencia de los gastos sociales en España a partir de la Encuesta de Presupuestos Familiares (1990-1991)*. Cedecs, Barcelona.
- GASTWIRTH, J.L. (1971). A General Definition of the Lorenz Curve. *Econometrica*, 39, 1037-1039.
- GASTWIRTH, J.L. (1972). The Estimation of the Lorenz Curve and Gini Index. *The Review of Economics and Statistics*, 54, 306-316.
- HERRERÍAS, R. y GARCÍA, R.M. (2000). Análisis de la Desigualdad de la Renta en Granada, a partir de los Datos de la E.P.F. y Diferentes Estimaciones de la Curva de Lorenz. *Anales de Economía Aplicada, Actas XIV Reunión de Asepelt-España*.
- JAIN, S. (1975). *Size Distribution of Income: A Compilation of Data*. Washington: The World Bank.
- KAKWANI, N. C. (1984). Welfare ranking of Income Distributions. *Advances in Econometrics*, 3, 191-213.
- KAKWANI, N.C. y PODDER, N. (1976). Efficient Estimation of the Lorenz Curve and Associated Inequality Measures from Grouped Observations. *Econometrica*, 44, 137-148.
- LOVELL, M.C. (1998). Inequality Within and Among Nations. *Journal on Income Distribution*, 8, 5-44.
- MAASOUMI, E. (1997). Empirical Analysis of Inequality and Welfare. *Handbook of Applied Microeconometrics*, Basil Blackwell, London.
- MARSHALL, A.W. y OLKIN, I. (1979). *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*. Academic Press. New York.
- MCDONALD, J.B. (1984). Some Generalized Functions for the Size Distribution of Income. *Econometrica*, 52, 647-663.



- ORTEGA, P., MARTÍN, A., FERNÁNDEZ, A., LADOUX, M. y GARCÍA, A. (1991). A New Functional Form for Estimating Lorenz Curves. *Review of Income and Wealth*, 37, 447-452.
- PARSIAN, A. (1990). On the Admissibility of an Estimator of a Normal Mean Vector under a LINEX Loss Function. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 42, 657-669.
- PASCUAL, M. y SARABIA, J.M. (2000). Rankings de Distribuciones de Renta Basados en Curvas de Lorenz Ordenadas. *Actas XIV Reunión de Asepelt- España*, 49
- PASCUAL, M. y SARABIA, J.M. (2001). Análisis de la Distribución de la Renta y la Riqueza en España (1973-1990) con Datos Corregidos de las Encuestas Básicas de Presupuestos Familiares. *Actas VIII Encuentro de Economía Pública: Economía Pública y Globalización*.
- PENA TRAPERO, B. y PRIETO ALÁIZ, M. (2000). Repercusiones de la Ocultación de Renta sobre la Medición de la Desigualdad. *Estudios de Economía Aplicada*, 14, 153-172.
- ROUSSEEUW, P.J. (1984). Least Median of Squares Regression. *Journal of the American Statistical Association*, 79, 871-880.
- RYU, H. y SLOTTJE, D. (1996). Two Flexible Functional Forms for Approximating the Lorenz Curve. *Journal of Econometrics*, 72, 251-274.
- SARABIA, J.M. (1997). A Hierarchy of Lorenz Curves based on the Generalized Tukey's Lambda Distribution. *Econometric Reviews*, 16, 305-320.
- SARABIA, J.M. y CASTILLO, E. (1998). Curvas de Lorenz de Pareto Generalizadas. Aplicación al Estudio de la Desigualdad y la Pobreza en España. *Actas de XII Reunión Asepelt España*. Córdoba.
- SARABIA, J.M. y PASCUAL, M. (2000). Una Nueva Clase de Curvas de Lorenz. *Actas XXV Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*, 409-410.
- SARABIA, J.M. y PASCUAL, M. (2000). Análisis de la Desigualdad de Renta en España (1973-1990) con Datos Corregidos de las EBPF y Curvas de Lorenz de Pareto Generalizadas. *Actas IV Jornadas de Política Económica: La Unión Europea y el Debate del Estado del Bienestar*, 349-353.
- SARABIA, J.M. y PASCUAL, M. (2001). A Class of Lorenz Curves Based on Linear Exponential Loss Functions. Enviado.
- SARABIA, J.M., CASTILLO, E. y SLOTTJE, D.J. (1999). An Ordered Family of Lorenz Curves. *Journal of Econometrics*, 91, 43-60.
- SARABIA, J.M., CASTILLO, E. y SLOTTJE, D.J. (2001). An Exponential Family of Lorenz Curves. *Southern Economic Journal*, 67 (3), 748-756.
- SEN, A. (1973). *The Economics of Inequality*. Oxford University Press, Oxford.
- SHAKED, M. (1980). On Mixtures from Exponential Families. *Journal of the Royal Statistical Society*, B42, 192-198.
- SHORROCKS, A.F. (1983). "Ranking Income Distributions. *Economica*, 50, 3-17.
- SHORROCKS, A.F. y FOSTER, J.E. (1987). Transfer Sensitive Inequality Measures. *Review of Economic Studies*, 54, 485-497.

- VARIAN, H.R. (1975). A Bayesian Approach to real State Assessment. In: Fienberg, S.E., Zellner, A. (eds), *Studies in Bayesian Econometrics and Statistics*, in Honour of L.J. Savage. North-Holland, Amsterdam, 195-208.
- ZELLNER, A. (1986). Bayesian Estimation and Prediction Using Asymmetric Loss Functions. *Journal of the American Statistical Association*, 81, 446-451.

## ANEXO 1

## CURVAS DE LORENZ DE PARETO GENERALIZADAS.

COMUNIDADES AUTÓNOMAS	1973		1980		1990	
	$L_1(p,k,\alpha)$	$L_2(p,k,\gamma)$	$L_1(p,k,\alpha)$	$L_1(p,k,\gamma)$	$L_1(p,k,\alpha)$	$L_1(p,k,\gamma)$
España	0,005	0,003	0,000	0,007	0,001	0,003
Andalucía	0,006	0,001	0,002	0,004	0,012	0,036
Aragón	0,031	0,068	0,003	0,002	0,028	0,047
Asturias	0,007	0,004	0,004	0,005	0,075	0,070
Baleares	0,017	0,026	0,127	0,075	0,024	0,020
Canarias	0,026	0,006	0,013	0,002	0,029	0,010
Cantabria	0,134	0,183	0,010	0,029	0,012	0,004
Castilla-León	0,009	0,028	0,011	0,001	0,031	0,013
Castilla-La Mancha	0,017	0,017	0,037	0,073	0,044	0,076
Cataluña	0,005	0,003	0,058	0,096	0,015	0,004
C. Madrid	0,047	0,015	0,086	0,039	0,008	0,027
C. Valenciana	0,001	0,004	0,030	0,061	0,003	0,010
Extremadura	0,009	0,001	0,015	0,003	0,002	0,009
Galicia	0,016	0,004	0,006	0,022	0,004	0,007
Murcia	0,057	0,097	0,099	0,057	0,009	0,014
Navarra	0,009	0,024	0,035	0,023	0,007	0,004
País Vasco	0,020	0,045	0,266	0,238	0,220	0,206
Rioja	0,068	0,100	0,009	0,003	0,005	0,008
Ceuta y Melilla	---	---	0,129	0,095	0,029	0,029
MEDIA	0,027	0,035	0,049	0,044	0,029	0,031
COEF.VARIACIÓN	1,186	1,349	1,326	1,277	1,641	1,472

Tabla 1.

*Suma de los Cuadrados de los Residuos (en miles). Comunidades Autónomas*

CATEGORÍAS PROFESIONALES <sup>2</sup>	1973		1980		1990	
	$L_1(p,k,\alpha)$	$L_2(p,k,\gamma)$	$L_1(p,k,\alpha)$	$L_1(p,k,\gamma)$	$L_1(p,k,\alpha)$	$L_1(p,k,\gamma)$
EACA	0,046	0,015	0,027	0,012	0,186	0,130
EASA	0,087	0,052	0,129	0,082	0,019	0,030
RAA	0,100	0,081	0,103	0,067	0,011	0,026
NACA	0,124	0,058	0,064	0,024	0,007	0,012
NASA	0,012	0,015	0,004	0,015	0,016	0,007
CSNA	0,050	0,023	0,146	0,092	0,053	0,030
CMNA	0,055	0,027	0,026	0,012	0,006	0,003
JNA	0,024	0,014	0,029	0,018	0,019	0,012
ONA	0,033	0,017	0,028	0,015	0,029	0,015
OTRO	0,012	0,006	0,096	0,172	0,009	0,029
MEDIA	0,054	0,031	0,065	0,051	0,035	0,029
COEF.VARIACIÓN	0,665	0,755	0,727	0,982	1,466	1,190

Tabla 2.

*Suma de los Cuadrados de los Residuos (en miles). Categorías Profesionales.*

CLASES DE HÁBITAT <sup>3</sup>	1973		1980		1990	
	$L_1(p,k,\alpha)$	$L_2(p,k,\gamma)$	$L_1(p,k,\alpha)$	$L_1(p,k,\gamma)$	$L_1(p,k,\alpha)$	$L_1(p,k,\gamma)$
TIPO 1	0,057	0,026	0,112	0,182	0,007	0,016
TIPO 2	0,013	0,005	0,009	0,029	0,011	0,028
TIPO 3SC	0,014	0,002	0,009	0,002	0,001	0,005
TIPO 4CC	0,001	0,007	0,017	0,002	0,000	0,004
MEDIA	0,021	0,010	0,037	0,054	0,005	0,013
COEF.VARIACIÓN	1,011	0,951	1,179	1,391	0,897	0,723

Tabla 3.

*Suma de los Cuadrados de los Residuos (en miles). Clases de Hábitat.*

<sup>2</sup> Las abreviaturas hacen referencia a las siguientes categorías socioprofesionales:

EACA: Empresarios agrarios con asalariados, y directores, gerentes y personal titulado agrario

EASA: Empresarios agrarios sin asalariados

RAA: Resto de activos agrarios

NACA: Empresarios no agrarios con asalariados y profesionales liberales con o sin asalariados

NASA: Empresarios no agrarios sin asalariados y trabajadores independientes

CSNA: Directivos, gerentes, cuadros superiores no agrarios y profesionales de las Fuerzas Armadas

CMNA: Cuadros medios y resto del personal administrativo, comercial y técnico

JNA: Contra maestres, capataces y jefes de grupo no agrarios

ONA: Obreros no agrarios y resto de trabajadores de los servicios

OTRO: Activos no clasificables, incluso parados y no activos

<sup>3</sup> Las abreviaturas hacen referencia a las siguientes clases de hábitat:

Tipo 1: Municipios de hasta 2000 habitantes

Tipo 2: Municipios de 2001 hasta 10000 habitantes

Tipo 3SC: Municipios de 10001 hasta 50000 habitantes, excepto capitales

Tipo 4CC: Municipios de más de 50000 habitantes y capitales

$L_1(p, k, \alpha)$	Índice de pobreza			Gini		
	1973	1980	1990	1973	1980	1990
España	0,237	0,224	0,196	0,383	0,372	0,347
Andalucía	0,407	0,355	0,315	0,404	0,379	0,363
Aragón	0,199	0,170	0,167	0,394	0,370	0,301
Asturias	0,178	0,200	0,133	0,326	0,342	0,287
Baleares	0,107	0,156	0,142	0,304	0,369	0,321
Canarias	0,243	0,336	0,279	0,380	0,378	0,347
Cantabria	0,166	0,161	0,199	0,364	0,364	0,316
Castilla-León	0,349	0,220	0,203	0,423	0,336	0,340
Castilla-La Mancha	0,357	0,379	0,324	0,396	0,368	0,351
Cataluña	0,112	0,128	0,103	0,320	0,351	0,330
C. Madrid	0,127	0,154	0,100	0,408	0,388	0,364
C. Valenciana	0,196	0,213	0,186	0,345	0,367	0,314
Extremadura	0,470	0,444	0,365	0,408	0,367	0,340
Galicia	0,282	0,232	0,220	0,361	0,350	0,320
Murcia	0,404	0,244	0,300	0,400	0,351	0,378
Navarra	0,152	0,164	0,089	0,325	0,349	0,292
País Vasco	0,111	0,110	0,137	0,354	0,286	0,311
Rioja	0,161	0,135	0,169	0,352	0,288	0,319
Ceuta y Melilla	---	0,283	0,361	---	0,367	0,395
$L_1(p, k, \alpha)$	Desarrollo					
	1973	1980	1990			
España	342847,7	367437,0	455720,7			
Andalucía	257675,6	290159,7	369130,4			
Aragón	362862,6	411792,8	459202,3			
Asturias	365524,9	388246,1	495199,9			
Baleares	420267,6	438242,9	515641,1			
Canarias	339655,8	301429,9	390161,6			
Cantabria	366095,5	410676,0	442093,6			
Castilla-León	286678,5	369814,2	444978,0			
Castilla-La Mancha	279436,0	284377,6	366169,7			
Cataluña	429457,0	426054,9	569867,3			
C. Madrid	449441,8	447731,9	559588,2			
C. Valenciana	354267,8	367627,6	445582,9			
Extremadura	232387,5	253440,8	339103,2			
Galicia	309850,8	354867,9	422276,6			
Murcia	269618,8	348005,6	381413,4			
Navarra	382807,0	442888,2	579857,9			
País Vasco	420979,7	471637,0	531732,1			
Rioja	378831,3	423194,7	461490,4			
Ceuta y Melilla	---	327706,1	343438,1			

Tabla 4. Medidas de Pobreza, Desigualdad y Desarrollo para la curva  $L_1(p, k, \alpha)$  por Comunidades Autónomas.

$L_1(p, k, \alpha)$	Theil			Atkinson 0.5		
	1973	1980	1990	1973	1980	1990
España	0,296	0,274	0,231	0,126	0,118	0,102
Andalucía	0,344	0,280	0,258	0,141	0,122	0,112
Aragón	0,350	0,274	0,168	0,137	0,117	0,076
Asturias	0,203	0,209	0,148	0,090	0,098	0,069
Baleares	0,175	0,263	0,186	0,078	0,116	0,087
Canarias	0,286	0,292	0,219	0,123	0,123	0,102
Cantabria	0,305	0,271	0,182	0,119	0,114	0,084
Castilla-León	0,406	0,262	0,222	0,157	0,114	0,098
Castilla-La Mancha	0,332	0,285	0,261	0,136	0,118	0,107
Cataluña	0,193	0,258	0,206	0,087	0,107	0,092
C. Madrid	0,365	0,301	0,283	0,145	0,129	0,116
C. Valenciana	0,240	0,283	0,186	0,102	0,117	0,083
Extremadura	0,348	0,263	0,222	0,143	0,115	0,098
Galicia	0,266	0,236	0,193	0,112	0,104	0,087
Murcia	0,387	0,236	0,286	0,144	0,104	0,122
Navarra	0,205	0,242	0,151	0,090	0,104	0,071
País Vasco	0,266	0,140	0,168	0,109	0,068	0,081
Rioja	0,259	0,145	0,196	0,108	0,069	0,087
Ceuta y Melilla	---	0,264	0,300	---	0,115	0,133
$L_1(p, k, \alpha)$	Atkinson 1			Atkinson 2		
	1973	1980	1990	1973	1980	1990
España	0,224	0,212	0,187	0,390	0,374	0,337
Andalucía	0,245	0,222	0,204	0,412	0,400	0,363
Aragón	0,230	0,209	0,143	0,364	0,363	0,261
Asturias	0,166	0,189	0,132	0,296	0,373	0,249
Baleares	0,145	0,212	0,164	0,259	0,383	0,315
Canarias	0,223	0,217	0,193	0,395	0,370	0,374
Cantabria	0,198	0,201	0,158	0,306	0,339	0,298
Castilla-León	0,263	0,207	0,180	0,417	0,368	0,323
Castilla-La Mancha	0,236	0,205	0,186	0,394	0,339	0,303
Cataluña	0,160	0,186	0,170	0,288	0,306	0,307
C. Madrid	0,247	0,230	0,200	0,403	0,405	0,326
C. Valenciana	0,182	0,204	0,154	0,310	0,337	0,276
Extremadura	0,251	0,208	0,179	0,426	0,371	0,321
Galicia	0,198	0,189	0,161	0,336	0,339	0,293
Murcia	0,235	0,191	0,219	0,353	0,346	0,383
Navarra	0,163	0,187	0,137	0,287	0,323	0,262
País Vasco	0,189	0,136	0,159	0,308	0,281	0,322
Rioja	0,188	0,135	0,158	0,311	0,266	0,280
Ceuta y Melilla	---	0,208	0,245	---	0,371	0,456

Tabla 5. Medidas de Desigualdad para la curva  $L_1(p, k, \alpha)$  por Comunidades Autónomas.

$L_2(p, k, \gamma)$	Índice de pobreza			Gini		
	1973	1980	1990	1973	1980	1990
España	0,240	0,226	0,197	0,382	0,371	0,347
Andalucía	0,414	0,361	0,319	0,403	0,378	0,362
Aragón	0,200	0,170	0,167	0,393	0,369	0,301
Asturias	0,179	0,200	0,132	0,326	0,341	0,287
Baleares	0,105	0,155	0,141	0,304	0,368	0,320
Canarias	0,245	0,342	0,282	0,379	0,377	0,347
Cantabria	0,166	0,160	0,199	0,363	0,363	0,315
Castilla-León	0,357	0,221	0,204	0,421	0,365	0,340
Castilla-La Mancha	0,363	0,385	0,329	0,395	0,367	0,350
Cataluña	0,110	0,126	0,101	0,319	0,350	0,329
C. Madrid	0,124	0,152	0,097	0,407	0,387	0,363
C. Valenciana	0,197	0,214	0,187	0,344	0,366	0,313
Extremadura	0,477	0,449	0,370	0,407	0,366	0,339
Galicia	0,286	0,234	0,222	0,360	0,349	0,320
Murcia	0,410	0,246	0,305	0,399	0,350	0,377
Navarra	0,152	0,126	0,088	0,324	0,348	0,291
País Vasco	0,109	0,108	0,136	0,353	0,286	0,310
Rioja	0,182	0,134	0,241	0,364	0,288	0,367
Ceuta y Melilla	---	0,276	0,366	---	0,359	0,394
$L_2(p, k, \gamma)$	Desarrollo					
	1973	1980	1990			
España	343377,9	367977,0	456271,6			
Andalucía	258143,3	290607,9	369644,7			
Aragón	363441,2	412384,0	459521,6			
Asturias	365877,0	388638,8	495496,0			
Baleares	420588,4	438784,1	516112,7			
Canarias	340196,2	301905,7	390599,1			
Cantabria	366521,1	411216,0	442460,6			
Castilla-León	287268,3	370335,6	445431,4			
Castilla-La Mancha	279937,3	284797,6	366583,0			
Cataluña	429847,8	426573,2	570434,5			
C. Madrid	450277,7	448617,7	560331,9			
C. Valenciana	354685,9	368147,7	445975,1			
Extremadura	232832,5	253803,6	339503,5			
Galicia	310243,6	355337,8	422662,5			
Murcia	270030,7	348427,6	382005,9			
Navarra	383186,3	443390,2	580193,6			
País Vasco	421491,0	471823,9	532097,1			
Rioja	371861,6	423456,3	429534,3			
Ceuta y Melilla	---	331873,7	344034,7			

Tabla 6. Medidas de Pobreza, Desigualdad y Desarrollo para la curva  $L_2(p, k, \gamma)$  por Comunidades Autónomas.

$L_2(p, k, \gamma)$	Theil			Atkinson 0.5		
	1973	1980	1990	1973	1980	1990
España	0,282	0,262	0,223	0,123	0,115	0,100
Andalucía	0,326	0,267	0,247	0,137	0,119	0,110
Aragón	0,333	0,262	0,163	0,134	0,114	0,075
Asturias	0,197	0,203	0,145	0,089	0,096	0,068
Baleares	0,170	0,253	0,181	0,077	0,113	0,085
Canarias	0,273	0,279	0,212	0,120	0,120	0,100
Cantabria	0,294	0,260	0,177	0,117	0,111	0,082
Castilla-León	0,382	0,251	0,214	0,153	0,111	0,096
Castilla-La Mancha	0,315	0,272	0,251	0,132	0,115	0,105
Cataluña	0,187	0,248	0,199	0,085	0,105	0,090
C. Madrid	0,344	0,287	0,271	0,141	0,125	0,113
C. Valenciana	0,231	0,271	0,181	0,100	0,114	0,082
Extremadura	0,329	0,252	0,214	0,140	0,112	0,096
Galicia	0,255	0,227	0,187	0,110	0,102	0,085
Murcia	0,370	0,227	0,273	0,141	0,102	0,119
Navarra	0,198	0,233	0,148	0,088	0,102	0,070
País Vasco	0,255	0,137	0,165	0,107	0,068	0,080
Rioja	0,265	0,142	0,245	0,113	0,068	0,112
Ceuta y Melilla	---	0,246	0,286	---	0,108	0,129
$L_2(p, k, \gamma)$	Atkinson 1			Atkinson 2		
	1973	1980	1990	1973	1980	1990
España	0,220	0,209	0,184	0,379	0,365	0,330
Andalucía	0,241	0,218	0,200	0,401	0,388	0,354
Aragón	0,227	0,205	0,141	0,357	0,354	0,257
Asturias	0,163	0,186	0,130	0,291	0,363	0,246
Baleares	0,143	0,208	0,162	0,255	0,373	0,308
Canarias	0,219	0,213	0,190	0,384	0,361	0,364
Cantabria	0,196	0,197	0,156	0,303	0,332	0,292
Castilla-León	0,258	0,203	0,177	0,407	0,359	0,317
Castilla-La Mancha	0,232	0,201	0,183	0,384	0,332	0,298
Cataluña	0,157	0,183	0,167	0,283	0,301	0,301
C. Madrid	0,243	0,226	0,197	0,393	0,393	0,321
C. Valenciana	0,179	0,201	0,152	0,304	0,331	0,272
Extremadura	0,246	0,204	0,177	0,414	0,361	0,314
Galicia	0,195	0,186	0,158	0,330	0,332	0,287
Murcia	0,232	0,188	0,215	0,348	0,338	0,373
Navarra	0,161	0,184	0,135	0,282	0,317	0,258
País Vasco	0,186	0,134	0,157	0,304	0,276	0,315
Rioja	0,199	0,133	0,208	0,331	0,262	0,384
Ceuta y Melilla	---	0,196	0,240	---	0,341	0,440

Tabla 7. Medidas de Desigualdad para la curva  $L_2(p, k, \gamma)$  por Comunidades Autónomas.



$L_1(p, k, \alpha)$	Índice de pobreza			Gini		
	1973	1980	1990	1973	1980	1990
EACA	0,370	0,213	0,182	0,391	0,428	0,375
EASA	0,374	0,344	0,258	0,337	0,352	0,314
RAA	0,459	0,486	0,337	0,328	0,329	0,330
NACA	0,107	0,110	0,127	0,428	0,405	0,365
NASA	0,212	0,243	0,213	0,347	0,348	0,334
CSNA	0,073	0,083	0,067	0,408	0,370	0,337
CMNA	0,096	0,096	0,089	0,339	0,318	0,322
JNA	0,092	0,083	0,054	0,308	0,262	0,249
ONA	0,212	0,216	0,208	0,308	0,287	0,302
OTRO	0,260	0,249	0,215	0,432	0,425	0,346

$L_1(p, k, \alpha)$	Desarrollo		
	1973	1980	1990
EACA	272695,3	383562,8	515587,5
EASA	262805,8	291006,9	397079,0
RAA	230582,6	234900,9	350392,9
NACA	507594,4	542412,2	555054,0
NASA	349806,9	347412,1	437905,8
CSNA	608578,0	600947,3	730354,9
CMNA	475142,2	488785,9	565943,2
JNA	472755,2	457497,4	614515,8
ONA	342034,9	349311,3	428219,4
OTRO	341008,3	359476,9	441159,0

Tabla 8. Medidas de Pobreza, Desigualdad y Desarrollo para la curva  $L_1(p, k, \alpha)$  por Categorías Socioprofesionales\*

$L_1(p, k, \alpha)$	Theil			Atkinson 0.5		
	1973	1980	1990	1973	1980	1990
EACA	0,318	0,428	0,255	0,132	0,162	0,119
EASA	0,207	0,224	0,173	0,095	0,104	0,083
RAA	0,193	0,195	0,202	0,091	0,091	0,092
NACA	0,404	0,331	0,263	0,159	0,140	0,114
NASA	0,232	0,234	0,206	0,102	0,103	0,094
CSNA	0,343	0,260	0,207	0,143	0,116	0,095
CMNA	0,219	0,186	0,203	0,097	0,085	0,089
JNA	0,170	0,122	0,107	0,079	0,057	0,052
ONA	0,169	0,144	0,164	0,079	0,069	0,076
OTRO	0,397	0,410	0,224	0,161	0,159	0,101
$L_1(p, k, \alpha)$	Atkinson 1			Atkinson 2		
	1973	1980	1990	1973	1980	1990
EACA	0,231	0,268	0,228	0,390	0,417	0,458
EASA	0,181	0,199	0,161	0,345	0,390	0,323
RAA	0,174	0,174	0,172	0,343	0,337	0,321
NACA	0,272	0,250	0,205	0,444	0,440	0,361
NASA	0,186	0,188	0,177	0,333	0,335	0,331
CSNA	0,252	0,215	0,180	0,435	0,401	0,344
CMNA	0,179	0,160	0,160	0,323	0,297	0,280
JNA	0,151	0,110	0,100	0,290	0,209	0,196
ONA	0,152	0,133	0,146	0,295	0,259	0,277
OTRO	0,280	0,266	0,189	0,475	0,424	0,351

Tabla 9. Medidas de Desigualdad para la curva  $L_1(p, k, \alpha)$  por Categorías Socioprofesionales\*

$L_2(p, k, \gamma)$	Índice de pobreza			Gini		
	1973	1980	1990	1973	1980	1990
EACA	0,376	0,216	0,183	0,390	0,427	0,374
EASA	0,379	0,347	0,259	0,336	0,351	0,314
RAA	0,463	0,506	0,341	0,328	0,343	0,330
NACA	0,102	0,106	0,124	0,427	0,404	0,364
NASA	0,213	0,245	0,214	0,346	0,347	0,334
CSNA	0,068	0,079	0,064	0,407	0,370	0,337
CMNA	0,093	0,094	0,086	0,338	0,317	0,322
JNA	0,090	0,082	0,053	0,307	0,262	0,249
ONA	0,212	0,217	0,209	0,307	0,286	0,302
OTRO	0,264	0,253	0,216	0,430	0,424	0,346

$L_2(p, k, \gamma)$	Desarrollo		
	1973	1980	1990
EACA	273151,5	384357,4	516266,5
EASA	263047,9	291324,3	397414,2
RAA	230778,6	230181,9	350763,5
NACA	508636,3	543440,9	555826,0
NASA	350219,2	347818,7	438336,6
CSNA	609785,9	601746,3	730291,1
CMNA	475631,1	489217,3	566452,6
JNA	473100,7	457699,0	614783,3
ONA	342299,2	349516,4	428532,9
OTRO	341821,8	360281,4	441680,0

Tabla 10. Medidas de Pobreza, Desigualdad y Desarrollo para la curva  $L_2(p, k, \gamma)$  por Categorías Socioprofesionales\*

$L_2(p, k, \gamma)$	Theil			Atkinson 0.5		
	1973	1980	1990	1973	1980	1990
EACA	0,302	0,402	0,246	0,128	0,158	0,116
EASA	0,201	0,217	0,169	0,094	0,102	0,081
RAA	0,187	0,209	0,196	0,089	0,097	0,090
NACA	0,379	0,314	0,252	0,155	0,136	0,111
NASA	0,224	0,225	0,200	0,100	0,101	0,092
CSNA	0,325	0,250	0,202	0,139	0,114	0,094
CMNA	0,211	0,181	0,196	0,095	0,084	0,087
JNA	0,165	0,120	0,106	0,078	0,057	0,051
ONA	0,165	0,141	0,160	0,078	0,068	0,075
OTRO	0,372	0,386	0,216	0,156	0,154	0,099
$L_2(p, k, \gamma)$	Atkinson 1			Atkinson 2		
	1973	1980	1990	1973	1980	1990
EACA	0,227	0,263	0,224	0,380	0,408	0,442
EASA	0,178	0,196	0,159	0,337	0,379	0,316
RAA	0,172	0,184	0,170	0,335	0,347	0,314
NACA	0,267	0,245	0,201	0,432	0,426	0,352
NASA	0,183	0,185	0,174	0,326	0,328	0,324
CSNA	0,247	0,212	0,178	0,422	0,389	0,337
CMNA	0,176	0,157	0,158	0,316	0,291	0,275
JNA	0,149	0,109	0,099	0,284	0,206	0,194
ONA	0,150	0,131	0,144	0,289	0,255	0,272
OTRO	0,274	0,261	0,186	0,458	0,413	0,343

Tabla 11. Medidas de Desigualdad para la curva  $L_2(p, k, \gamma)$  por Categorías Socioprofesionales\*

$L_1(p, k, \alpha)$	Índice de pobreza			Gini		
	1973	1980	1990	1973	1980	1990
TIPO1	0,365	0,372	0,273	0,359	0,407	0,304
TIPO2	0,358	0,328	0,258	0,372	0,365	0,337
TIPO4CC	0,153	0,155	0,159	0,389	0,368	0,353
TIPO3SC	0,261	0,270	0,226	0,355	0,344	0,339
$L_1(p, k, \alpha)$	Desarrollo					
	1973	1980	1990			
TIPO1	268085,4	291515,6	382442,9			
TIPO2	275499,5	302118,4	399970,1			
TIPO4CC	321499,3	9331011,	424470,3			
TIPO3SC	410374,1	431637,3	503123,8			

Tabla 12. Medidas de Pobreza, Desigualdad y Desarrollo para la curva  $L_1(p, k, \alpha)$  por Clases de Hábitat

$L_1(p, k, \alpha)$	Theil			Atkinson 0.5		
	1973	1980	1990	1973	1980	1990
TIPO1	0,240	0,376	0,170	0,109	0,146	0,078
TIPO2	0,276	0,256	0,218	0,118	0,113	0,096
TIPO3SC	0,240	0,218	0,220	0,107	0,100	0,097
TIPO4CC	0,319	0,267	0,240	0,131	0,115	0,106
$L_1(p, k, \alpha)$	Atkinson 1			Atkinson 2		
	1973	1980	1990	1973	1980	1990
TIPO1	0,205	0,244	0,146	0,388	0,384	0,269
TIPO2	0,212	0,207	0,176	0,370	0,377	0,314
TIPO3SC	0,196	0,188	0,178	0,355	0,355	0,320
TIPO4CC	0,228	0,208	0,194	0,379	0,368	0,349

Tabla 13. Medidas de Desigualdad para la curva  $L_1(p, k, \alpha)$  por Clases de Hábitat

$L_2(p, k, \gamma)$	Índice de pobreza			Gini		
	1973	1980	1990	1973	1980	1990
TIPO1	0,370	0,379	0,275	0,358	0,405	0,303
TIPO2	0,363	0,333	0,260	0,371	0,364	0,336
TIPO4CC	0,263	0,273	0,228	0,354	0,343	0,338
TIPO3SC	0,156	0,154	0,158	0,388	0,367	0,352
<hr/>						
$L_2(p, k, \gamma)$	Desarrollo					
	1973	1980	1990			
TIPO1	268420,9	292082,1	382727,5			
TIPO2	275903,1	302544,8	400367,6			
TIPO4CC	321903,3	331367,7	424894,1			
TIPO3SC	411038,4	432226,7	503761,7			

Tabla 14. Medidas de Pobreza, Desigualdad y Desarrollo para la curva  $L_2(p, k, \gamma)$  por Clases de Hábitat

$L_2(p, k, \gamma)$	Theil			Atkinson 0.5		
	1973	1980	1990	1973	1980	1990
TIPO1	0,231	0,356	0,165	0,107	0,142	0,076
TIPO2	0,264	0,246	0,210	0,116	0,111	0,094
TIPO3SC	0,231	0,211	0,212	0,104	0,098	0,095
TIPO4CC	0,304	0,256	0,231	0,128	0,113	0,104
<hr/>						
$L_2(p, k, \gamma)$	Atkinson 1			Atkinson 2		
	1973	1980	1990	1973	1980	1990
TIPO1	0,201	0,240	0,144	0,377	0,376	0,265
TIPO2	0,208	0,204	0,173	0,361	0,367	0,308
TIPO3SC	0,192	0,185	0,176	0,347	0,346	0,313
TIPO4CC	0,224	0,205	0,191	0,370	0,359	0,341

Tabla 13. Medidas de Desigualdad para la curva  $L_2(p, k, \gamma)$  por Clases de Hábitat

ANEXO 2. CURVAS DE LORENZ DE PARETO GENERALIZADAS.

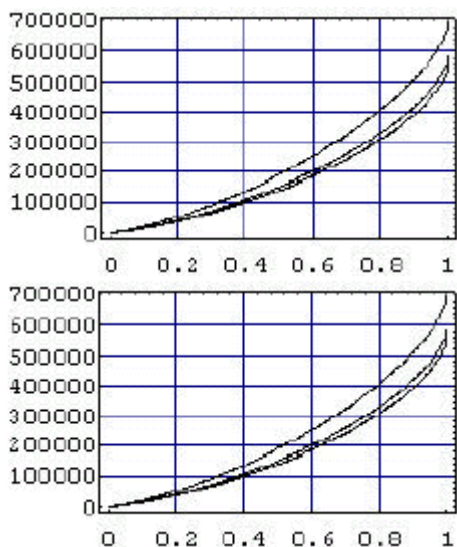


Gráfico 1: Curvas de Lorenz Generalizadas correspondientes a España en los años 1973, 1980 y 1990 para las curvas  $L_1(p, k, \alpha)$  (arriba) y  $L_2(p, k, \gamma)$  (abajo).

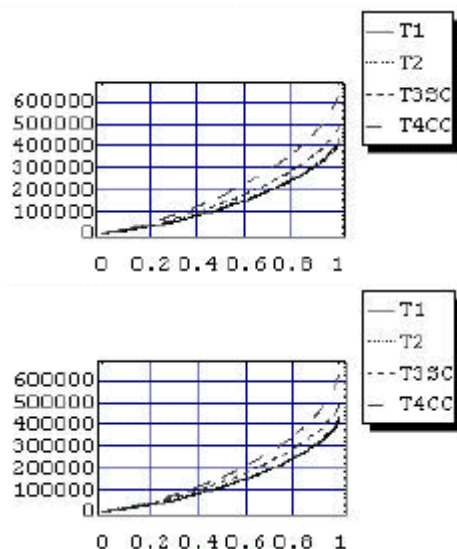


Gráfico 2: Curvas de Lorenz Generalizadas correspondientes a cada una de las clases de hábitat en 1973 para las curvas  $L_1(p, k, \alpha)$  (arriba) y  $L_2(p, k, \gamma)$  (abajo).

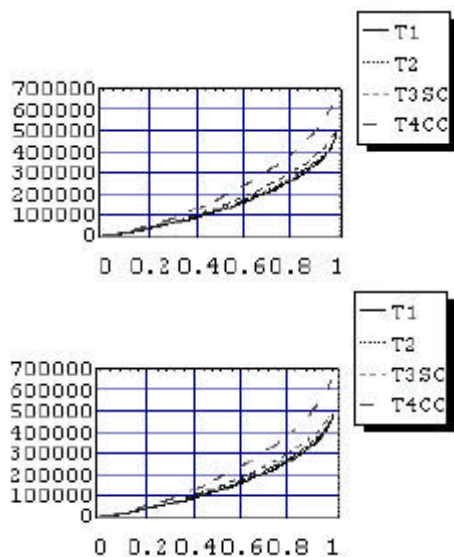


Gráfico 3: Curvas de Lorenz Generalizadas correspondientes a cada una de las clases de hábitat en 1980 para las curvas  $L_1(p, k, \alpha)$  (arriba) y  $L_2(p, k, \gamma)$  (abajo).

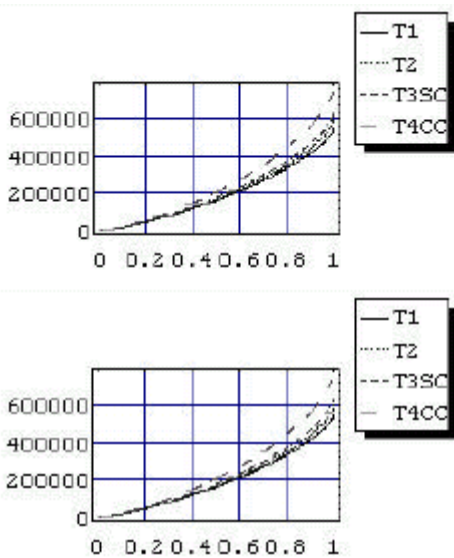


Gráfico 4: Curvas de Lorenz Generalizadas correspondientes a cada una de las clases de hábitat en 1990 para las curvas  $L_1(p, k, \alpha)$  (arriba) y  $L_2(p, k, \gamma)$  (abajo).



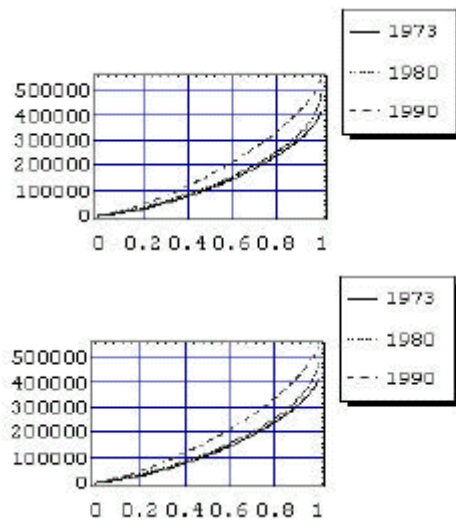


Gráfico 5: Evolución de las Curvas de Lorenz Generalizadas a los municipios de menos de 2000 habitantes para las curvas  $L_1(p, k, \alpha)$  (arriba) y  $L_2(p, k, \gamma)$  (abajo).

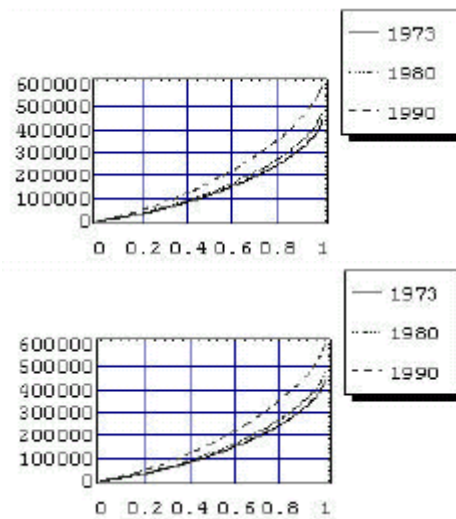


Gráfico 6: Evolución de las Curvas de Lorenz Generalizadas a los municipios de menos de 2001 hasta 10000 habitantes para las curvas  $L_1(p, k, \alpha)$  (arriba) y  $L_2(p, k, \gamma)$  (abajo).

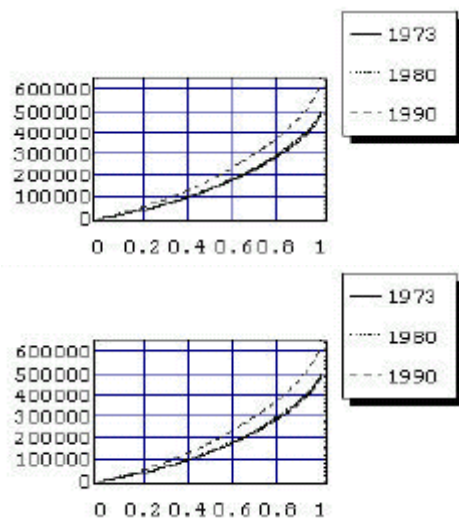


Gráfico 7: Evolución de las Curvas de Lorenz Generalizadas a los municipios de menos de 10001 hasta 50000 habitantes para las curvas  $L_1(p, k, \alpha)$  (arriba) y  $L_2(p, k, \gamma)$  (abajo).

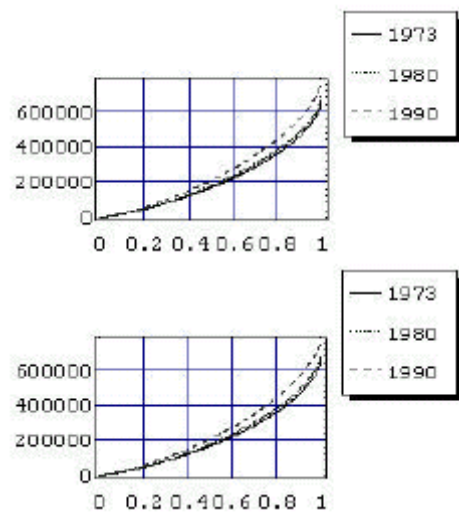


Gráfico 8: Evolución de las Curvas de Lorenz Generalizadas a los municipios de más de 50000 habitantes para las curvas  $L_1(p, k, \alpha)$  (arriba) y  $L_2(p, k, \gamma)$  (abajo).