CAPÍTULO 4

INCLUSIÓN DE CURVAS DE LORENZ EN LAS FUNCIONES GENERADORAS

ROSA Mª GARCÍA FERNÁNDEZ
JOSÉ MANUEL HERRERÍAS VELASCO

Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Granada

RESUMEN

En este trabajo, se describe en primer lugar, la modelización de curvas de Lorenz según el concepto de función generadora de curva de Lorenz (Callejón C. J., 1995). En segundo lugar, se describe la metodología propuesta por Sarabia, J.M. (1999) para obtener una familia ordenada de curvas de Lorenz, así como las diversas curvas de Lorenz obtenidas según este método y que aparecen en éste trabajo. En tercer lugar, se demuestra que la curva de Lorenz propuesta por Sarabia, J.M. en el trabajo mecionado anteriormente, puede obtenerse utilizando el concepto de función generadora de curva de Lorenz

PALABRAS CLAVE: Función generadora, curva de Lorenz, condiciones de contorno.

1. FUNCIONES GENERADORAS DE CURVAS DE LORENZ

Si f(y) es la función de densidad de una variable aleatoria y [a,b] es su dominio de definición, entonces la función generadora, vendrá dada por:

$$g(y) = \frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{d \ln f(y)}{dy} \tag{1}$$

para aquellos puntos en los que $f'(y)$ existe y $f(y)$ no es cero.

Lafuente, L. M. (1994) demuestra que diversas especificaciones propuestas de curva de Lorenz, como son las de Kakwani y Podder (primera especificación y segunda especificación 1973), Gupta, M.R. (1984), Ortega y otros (1991), Rasche y otros (1980), etc., pueden obtenerse como solución de la ecuación diferencial:

$$g(y) = \frac{f'(y)}{f(y)} \tag{2}$$

que coincide con la definición de función generadora.

Callejón C. J. (1995) demuestra que si la modelización L(p), de una curva de Lorenz verifica la ecuación diferencial anterior ha de ser de la forma:

$$L(p) = Ce^{\int^{p} g(p)dp} \tag{3}$$

Se estudian las condiciones necesarias y suficientes que ha de cumplir la función (g) para que la solución obtenida verifique las condiciones de contorno especificadas por Kakwani, Podder (1973) y Gupta, M.R. (1984).

De esta forma, si se llama

$$G(p) = \int^{p} g(p)dp \tag{4}$$

para que $f(p) = e^{G(p)-G(1)}$ sea una curva de Lorenz es condición necesaria y suficiente que se verifiquen las relaciones:

1) $\lim_{p \to 0} G(p) = -\infty$
2) $g(p) > 0 \quad \forall\ p \in [0,1]$
3) $(g(p))^2 + g'(p) \geq 0 \quad \forall\ p \in [\,0,1\,]$

2. FAMILIA ORDENADA DE CURVAS DE LORENZ

Sarabia (1999) sugiere un método distinto al anterior de obtención curvas de Lorenz, para lo cual se apoya en los siguientes teoremas:

TEOREMA 1.

Sea L(p) una curva de Lorenz. Se considera la transformación:

$$L_{\alpha}(p) = p^{\alpha} L(p), \quad \alpha \geq 0 \tag{5}$$

Si $\alpha \geq 1$, $L_{\alpha}(p)$ es una curva de Lorenz. De igual forma, si $0 \leq \alpha < 1$ y $L''(p) \geq 0$, $L_{\alpha}(p)$ será una curva de Lorenz.

TEOREMA 2.

Si L(p) es una curva de Lorenz, la expresión:

$$L_{\gamma}(p) = L(p)^{\gamma}, \quad \gamma \geq 1 \tag{6}$$

es una curva de Lorenz.

Para obtener una familia de curvas de Lorenz, se parte de una curva inicial $L_o(p)$. Utilizando los teoremas anteriores se generan las siguientes curvas:

$$L_1(p,\alpha) = p^{\alpha}Lo(p); (\alpha \geq 1) \vee (0 \leq \alpha < 1, Lo'''(p) \geq 0) \tag{7}$$

$$L_2(p,\gamma) = Lo(p)^{\gamma}; \gamma \geq 1 \tag{8}$$

Combinando las anteriores expresiones se tiene:

$$L_3(p,\alpha,\gamma) = p^{\alpha}Lo(p)^{\gamma}; (\alpha, \gamma \geq 1) \vee (0 \leq \alpha < 1, \gamma \geq 1, Lo'''(p) \geq 0) \tag{9}$$

Utilizando como curva de Lorenz inicial Lo(p), la forma funcional asociada a la distribución de Pareto, se obtiene la siguiente jerarquía de curvas de Lorenz:

$$L_1(p) = p^{\alpha}\left[1-(1-p)^k\right], \alpha \geq 0 \tag{10}$$

$$L_2(p) = \left[1-(1-p)^k\right]^{\gamma}, \gamma \geq 1 \tag{11}$$

$$L_3(p) = p^{\alpha}\left[1-(1-p)^k\right]^{\gamma}, \gamma \geq 1, \alpha \geq 0 \tag{12}$$

La expresión (10) coincide con la propuesta por Ortega y otros (1991). La forma funcional (11) coincide con la expresión propuesta por Rasche y otros (1980). Si en esta expresión se hace k=1, se tiene la forma potencial propuesta por Casas-Núñez (1991). La expresión (12) se le atribuye a Sarabia, y también es una curva de Lorenz cuando $0<\gamma<1$.

A continuación se demuestra que esta última expresión propuesta por Sarabia puede obtenerse utilizando el concepto de función generadora de curva de Lorenz.

Si

$$g(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\gamma k(1-p)^{k-1}}{\left[1-(1-p)^k\right]}$$

verifica la ecuación (1), su curva de Lorenz vendrá dada por la expresión

$$L(p) = Ce^{\int^p g(p)dp}.$$

Demostración:

En primer lugar se integra la función g(p):

$$\int g(p)dp = \int \frac{\alpha}{p}dp + \int \frac{\gamma k(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)^k}dp =$$

$$\alpha \ln p + \gamma \ln\left[1-(1-p)^k\right] = \ln p^{\alpha} + \ln\left[1-(1-p)^k\right]^{\gamma}$$

Sustituyendo en (3) se tiene:

$$L(p) = Ce^{Lnp^{\alpha} + Ln\left[1-(1-p)^k\right]^{\gamma}} = C\left[p^{\alpha}\left[1-(1-p)^k\right]^{\gamma}\right] \tag{13}$$

El valor de C, se calcula teniendo en cuenta que la curva de Lorenz pasa por el punto (1,1):

$$1 = C\left[1^{\alpha}\left[1-(1-1)^{k}\right]^{\gamma}\right] \Rightarrow C = 1 \tag{14}$$

Sustituyendo el valor de C en (13) se obtiene la expresión:

$$L(p) = p^{\alpha}\left[1-(1-p)^{k}\right]^{\gamma} \tag{15}$$

que es la especificación funcional (12) propuesta por Sarabia.

Para asegurar que $f(p) = e^{G(p)-G(1)}$ con $G(p) = \int^{p} g(p)dp$ es una curva de Lorenz es condición necesaria y sufiente que se verifiquen las siguientes relaciones:

1) $\lim_{p\to 0} G(p) = -\infty$

$$G(p) = \int^{p} g(p)dp = Ln\left[p^{\alpha}\left[1-(1-p)^{k}\right]^{\gamma}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{p\to 0} Ln\left[p^{\alpha}\left[1-(1-p)^{k}\right]^{\gamma}\right] = Ln[0] = -\infty$$

2) g(p)>0 $\quad \forall\, p \in [\,0,1\,]$

$$g(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\gamma k(1-p)^{k-1}}{\left[1-(1-p)^{k}\right]}, \text{ con } \gamma \geq 1, \alpha \geq 0 \text{ y } 0 < k \leq 1 \Rightarrow g(p) > 0$$

3) $(g(p))^{2} + g'(p) \geq 0 \quad \forall\, p \in [\,0,1\,]$

$$g^{2}(p) = \frac{\alpha^{2}}{p^{2}} + \frac{\gamma^{2}k^{2}(1-p)^{2(k-1)}}{\left[1-(1-p)^{k}\right]^{2}} + 2\frac{\alpha\,\gamma k(1-p)^{k-1}}{p\left[1-(1-p)^{k}\right]}$$

$$g'(p) = -\frac{\alpha}{p^{2}} - \frac{\gamma k(k-1)(1-p)^{k-2}}{\left[1-(1-p)^{k}\right]} - \frac{\gamma k^{2}(1-p)^{2(k-1)}}{\left[1-(1-p)^{k}\right]^{2}}$$

$$g^{2}(p) + g'(p) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{p^{2}} + \frac{\gamma k(1-p)^{k-2}\left[2\alpha(1-p) - p(k-1)\right]}{p\left[1-(1-p)^{k}\right]} +$$

$$+ \frac{\gamma k^{2}(1-p)^{2(k-1)}(\gamma-1)}{\left[1-(1-p)^{k}\right]^{2}}$$

Esta expresión es positiva para $\gamma \geq 1, \alpha \geq 0$ y $0 < k \leq 1$; en el límite, cuando $p \to 1$ la anterior expresión tiende a $+\infty$.

Podemos asegurar que $f(p) = e^{G(p)-G(1)}$ con $G(p) = \int^{p} g(p)dp$ es una curva de Lorenz.

3. CONCLUSIONES

Como conclusión, se recogen las curvas de Lorenz que cumplen las condiciones de contorno especificadas por Kakwani y Podder (1973) y sus correspondientes funciones generadoras de curvas de Lorenz.

En el primer cuadro, aparecen aquellas curvas que pueden estimarse por mínimos cuadrados ordinarios (MCO) y en el segundo, aquellas cuyos parámetros han de estimarse por métodos no lineales. En este segundo cuadro aparece la curva de Lorenz propuesta por Sarabia (1999) junto a su función generadora.

Curvas de Lorenz	Función Generadora de Curva de Lorenz
Kakwani y Podder (1973) $L(p)=pe^{-\gamma(1-p)}$ $\lambda>0$	$g(p)=\frac{1}{p}+\gamma$
Kakwani-Podder (1973) $L(p)=p^{b}e^{-\gamma(1-p)}$ $\lambda>0$	$g(p)=\frac{b}{p}+\gamma$
Casas-Nuñez (1991) $L(p)=p^{b}$ $b\geq 1$	$g(p)=\frac{b}{p}$
Lafuente (1994) $L(p)=p^{b}e^{p^{2}-1}$ $b\geq 1$	$g(p)=\frac{b}{p}+2p$
Basmann y otros (1990) $L(p)=p^{ap+b}e^{-c(1-p^{2})-d(1-p)}$	$g(p)=\frac{2p^{2}c+(a\ln p+a+d)p+b}{p}$
Gupta (1984) $L(p)=pA^{p-1}$ $A>0$	$g(p)=\frac{1}{p}+\ln A$

Cuadro 1. Curvas de Lorenz que pueden estimarse por MCO y funciones generadoras asociadas

Curvas de Lorenz	Función Generadora de Curva de Lorenz
Rasche y otros (1980) $L(p) = \left[1-(1-p)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\beta}}$ $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$	$g(p) = \dfrac{\alpha(1-p)^{\alpha-1}}{\beta - \beta(1-p)^{\alpha}}$
Ortega y otros (1991) $L(p) = p^{a}\left[1-(1-p)^{b}\right]$ $a \geq 0, 0 < b \leq 1$	$g(p) = \dfrac{a - ap(1-p)^{b} + bp(1-p)^{b-1}}{p\left[1-(1-p)^{b}\right]}$
Chotikapanich (1993) $L(p) = \dfrac{e^{kp}-1}{e^{k}-1}$ $k > 0$	$g(p) = \dfrac{ke^{kp}}{e^{kp}-1}$
Sarabia (1999) $L(p) = p^{\alpha}\left[1-(1-p)^{k}\right]^{\gamma}$ $\gamma \geq 1, \quad \alpha \geq 0$	$g(p) = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{\gamma k(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)^{k}}$

Cuadro 2. Curvas de Lorenz que se estiman mediante métodos no lineales y sus correspondientes funciones generadoras

BIBLIOGRAFÍA

CHOTIKAPANICH, D.(1993): A comparison of alternative functional forms for the Lorenz curve. *Economics Letters*, 41 (2); 129-138.

BASMANN, R.L., K. J. HAYES, D.J. SLOTTJE Y J.D. JOHNSON (1990): A General functional form for approximating the Lorenz Curve. *Journal of Econometrics*, 43; 77-90.

CALLEJÓN C., J. (1995): Funciones generadoras de una curva de Lorenz. *IX Reunión ASEPELT-ESPAÑA*, 343-350.

CASAS, J.M. y J.J. NUÑEZ (1991): Sobre la medición de la desigualdad y conceptos afines. *Actas V Reunión ASEPELT-ESPAÑA*, 67-73.

GUPTA, M.R. (1984): Functional form for estimating the Lorenz curve. *Econometrica,* 52 (5): 1313-1314.

KAKWANI, N.C. y PODDER (1973): On the estimation of Lorenz curves from grouped observations. *International Economic Review*, 14 (2); 278-291.

LAFUENTE, L.M. (1994): *Medidas de cuantificación de las desigualdad de la renta en España según la E.P.F. 1990/91*. Tesis Doctoral. Universidad de Murcia

ORTEGA, P., G. MARTIN, A. FERNANDEZ, M. LADOUX Y A. GARCIA (1991): A new funtional form for estimating Lorenz curves. *Review of income and wealth*, 37,4.

RASCHE, R.H., A. Y. GAFFNEY, C. KOO y N. OBTS (1980): Functional forms for estimating the Lorenz curve. *Econometrica*, 48 (4); 1061-1062.

SARABIA, J.M., CASTILLO, E. y SLOTTJE D.J. (1999): An ordered family of Lorenz curves. *Journal of Econometrics*, 91, 43-60.