CAPÍTULO 7

APLICACIÓN DE DISTINTOS MÉTODOS DE ESTIMACIÓN A LA FAMILIA DE DISTRIBUCIONES GENERADAS POR LA $_{p+1}F_p$

JOSÉ RODRÍGUEZ AVI
ANTONIO CONDE SÁNCHEZ
ANTONIO JOSÉ SAÉZ CASTILLO
MARÍA JOSÉ OLMO JIMÉNEZ

Dpto. de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Jaén

1. INTRODUCCIÓN

Las distribuciones discretas se han utilizado para modelizar diversos fenómenos de forma adecuada. Para abordar el estudio de muchas de ellas de forma sistemática se consideran familias de distribuciones que verifican una ecuación funcional. Uno de los aspectos de nuestra investigación se refiere a aquellas familias de distribuciones discretas generadas por funciones hipergeométricas del tipo $_{p+1}F_p$ o distribuciones de Kemp. Una de las cuestiones que suscita mayor interés es la estimación de los parámetros a través de los métodos más usuales.

Así, el método de máxima verosimilitud conduce con frecuencia a sistemas de ecuaciones que se han de resolver de forma iterativa, cuya convergencia puede depender fuertemente de los valores iniciales y donde las probabilidades deben ser calculadas después de cada iteración.

Por su parte, el método de los momentos puede ser inadecuado si el número de parámetros que es necesario estimar es elevado, ya que se requieren momentos de alto orden, los cuales no siempre han de existir en el modelo poblacional y, además, son muy sensibles a fluctuaciones muestrales. Concretamente, en la estimación de los parámetros de distribuciones generadas por la función hipergeométrica $_2F_1$, en donde sólo hay tres parámetros, este método proporciona buenas estimaciones siempre que no exista *overdispersion*. Sin embargo, para distribuciones generadas por la $_3F_2$, en donde es necesaria la existencia del momento de orden 6, no siempre se obtienen buenos resultados.

Con el fin de salvar estos inconvenientes, son numerosos los trabajos donde se plantean otras técnicas de estimación aprovechando la forma de la poligonal de las frecuencias observadas. Por ejemplo, si la proporción muestral del valor cero es grande, se usa un sistema con relaciones entre los primeros momentos y otra que incluya la proporción del valor cero; o bien, si las dos primeras frecuencias muestrales son grandes, entonces se considera una relación que contenga el cociente de las dos primeras frecuencias (Katti and Gurland, 1961). Esto ha motivado la aplicación de métodos mixtos en los que se emplean relaciones entre momentos de menor orden y relaciones entre frecuencias.

Otro método de estimación, utilizado fundamentalmente con distribuciones discretas, es el método de la mínima χ^2, el cual proporciona estimadores de alta eficiencia asintótica. La implementación de este método es relativamente simple, ya que los estimadores se obtienen como solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Así pues, en este trabajo presentamos los métodos descritos anteriormente, esto es, el método de los momentos, el método mixto y el método de la mínima χ^2, para la estimación de los parámetros en familias de distribuciones discretas generadas por funciones hipergeométricas.

2. DISTRIBUCIONES GENERADAS POR LA FUNCIÓN HIPERGEOMÉTRICA ${}_{p+1}F_p$

En general, la familia de distribuciones discretas de Pearson verifica la siguiente ecuación en diferencias:

$$G(r) f_{r+1} - L(r) f_r = 0, \quad r \in Z^+ \tag{1}$$

donde $L : Z^+ \to R$ y $G : Z^+ \to R - \{0\}$ son funciones en principio cualesquiera, y f_r es la función masa de probabilidad, $f_r = Pr[X = r]$. En el caso en que dichas funciones sean polinomios, las soluciones a la ecuación (1) pueden expresarse en términos de funciones hipergeométricas.

El caso más estudiado es aquél en el que ambos polinomios son de segundo grado y, además, una de las raíces de G es -1; en este caso la solución viene dada en términos de la función hipergeométrica de Gauss. Esto se debe, entre otras consideraciones, a que es la versión discreta de la solución de la ecuación diferencial que verifica, por ejemplo, la distribución Normal. A esta familia pertenecen la mayoría de las distribuciones discretas más usuales como la Binomial, la Hipergeométrica, la Binomial Negativa, la Distribución Univariante Generalizada de Waring (Irwing, 1975 y Xekalaki, 1983) y, en general, la familia de Ord (Ord, 1972), si bien no la incluye por completo, ya que algunas toman valores negativos.

Se han considerado extensiones sucesivas de dicha familia de distribuciones, tomando bien polinomios de orden 3, de forma que se obtiene la familia de distribuciones generada por la ${}_3F_2$ (Gutiérrez and Rodríguez, 1997) y Rodríguez *et al*, 2000), bien polinomios de orden 4, con la familia generada por la ${}_4F_3$ (Rodríguez *et al*, 1999).

Para L y G polinomios de grados p y q + 1, respectivamente, y donde una de las raíces de G es igual a -1, y las restantes son reales, podemos obtener la familia de distribuciones generadas por la función hipergeométrica generalizada ${}_pF_q$ (Johnson, Kotz and Kemp, 1992). A tales distribuciones se las conoce como *generalized hypergeometric probability distributions* (Johnson, Kotz and Kemp, 1992) las cuales pueden ser vistas como distribuciones en serie de potencias.

Consideremos que L y G son los polinomios siguientes:

$$G(r) = (\gamma_1 + r)\cdots(\gamma_p + r)(r+1)$$
$$L(r) = (\alpha_1 + r)\cdots(\alpha_{p+1} + r)\lambda \tag{2}$$

con $\alpha_i,\ i = 1,\cdots,p+1;\quad \gamma_j,\ j = 1,\cdots,p$ y λ reales, en principio, cualesquiera.

La solución de la ecuación en diferencias (1) viene dada por:

$$f_r = f_0 \frac{(\alpha_1)_r \cdots (\alpha_{p+1})_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r \cdots (\gamma_p)_r r!} \tag{3}$$

Para que la función (3) sea una función masa de probabilidad, debe verificar las siguientes condiciones,

1) Condición de positividad. Esta condición va a imponer restricciones sobre los parámetros $\alpha_i, \gamma_j, \lambda$, de forma que:

$$L(r)G(r) \geq 0$$

2) Condición de convergencia. En este caso,

$$\sum_{r=1}^{\infty} f_0 \frac{(\alpha_1)_r \cdots (\alpha_{p+1})_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r \cdots (\gamma_p)_r r!}$$

que es la función $f_0\left\{{}_{p+1}F_p(\alpha_1,\cdots,\alpha_{p+1};\gamma_1,\cdots,\gamma_p;\lambda)-1\right\}$, converge para $|\lambda| < 1$, mientras que para $|\lambda| = 1$ los parámetros han de cumplir las siguientes restricciones:

(a) si $\omega > 0$, entonces es absolutamente convergente.

(b) si $-1 < \omega \leq 0$, es condicionalmente convergente.

(c) si $\omega \leq -1$, es divergente.

donde $\quad \omega = \sum_{j=1}^{p} \gamma_j - \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i\ ! =$

3) Condición de normalización $f_0 = {}_{p+1}F_p(\alpha_1,\cdots,\alpha_{p+1};\gamma_1,\cdots,\gamma_p;\lambda)^{-1}$

Podemos observar que es necesario conocer el valor de la función hipergeométrica ${}_{p+1}F_p$ para obtener las probabilidades exactas de estas distribuciones.

Por otra parte, se obtiene la siguiente relación entre frecuencias consecutivas:

$$\frac{f_{r+1}}{f_r} = \frac{(\alpha_1 + r)\cdots(\alpha_{p+1} + r)\lambda}{(\gamma_1 + r)\cdots(\gamma_p + r)(r+1)} \tag{4}$$

que utilizaremos para obtener las probabilidades una vez conocido el valor de f_0 y también como relaciones que permitan estimar los parámetros, como veremos posteriormente.

2.1 *Función generatriz de probabilidad*

La función generatriz de probabilidad para las distribuciones con función masa de probabilidad (3) viene dada por:

$$g(t) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r t^r = f_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r \cdots (\alpha_{p+1})_r (\lambda t)^r}{(\gamma_1)_r \cdots (\gamma_p)_r r!}$$

esto es,

$$g(t) = \frac{{}_{p+1}F_p(\alpha_1,\cdots,\alpha_{p+1};\gamma_1,\cdots\gamma_p;\lambda t)}{{}_{p+1}F_p(\alpha_1,\cdots,\alpha_{p+1};\gamma_1,\cdots\gamma_p;\lambda)} \tag{5}$$

que existe si es convergente para $|t| \le 1$, lo cual se verifica atendiendo a las condiciones anteriores. En concreto, o $|\lambda| < 1$, lo cual implica que $|\lambda t| < 1$ para $|t| \le 1$; o $|\lambda| = 1$ y $\omega > 0$.

Dichas funciones generatrices de probabilidad se pueden caracterizar a través de la ecuación diferencial que verifican, que se obtiene siguiendo la metodología presentada en Gutiérrez y Rodríguez (1999).

Para ello es necesario expresar G en función de $r + 1$, esto es,

$$G(r) = \sum_{i=0}^{p+1} b_i (r+1)^i$$

y el polinomio L de la siguiente forma:

$$L(r) = \sum_{i=0}^{p+1} a_i r^i$$

de forma que los coeficientes *bi* son:

$$
\begin{aligned}
&b_{p+1} = 1\\
&b_p = \sum_{i_1=1}^{p}\left(\gamma_{i_1} - 1\right)\\
&b_{p-1} = \sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1\neq i_2}}^{p}\left(\gamma_{i_1} - 1\right)\left(\gamma_{i_2} - 1\right)\\
&\cdots\\
&b_2 = \sum_{\substack{i_1,\cdots i_{p-1}=1\\ i_1\neq\cdots\neq i_{p-1}}}^{p}\left(\gamma_{i_1} - 1\right)\cdots\left(\gamma_{i_{p-2}} - 1\right)\\
&b_1 = \left(\gamma_1 - 1\right)\cdots\left(\gamma_p - 1\right)\\
&b_0 = 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

y los coeficientes a_i son:

$$
\begin{aligned}
&a_{p+1} = \lambda\\
&a_p = \lambda\sum_{i_1=1}^{p+1}\alpha_{i_1}\\
&a_{p-1} = \lambda\sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1\neq i_2}}^{p+1}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\\
&\cdots\\
&a_1 = \lambda\sum_{\substack{i_1,\cdots i_p=1\\ i_1\neq\cdots\neq i_p}}^{p+1}\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_p}\\
&a_0 = \lambda\alpha_1\cdots\alpha_{p+1}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Así, la función generatriz de probabilidad verifica la ecuación diferencial,

$$
\lambda t\alpha_1\cdots\alpha_{p+1}g(t) = \left(1-\lambda t\right)\theta^{p+1}g(t) + \left[\sum_{i_1=1}^{p}\left(\gamma_{i_1}-1\right) - \lambda t\sum_{i_1=1}^{p+1}\alpha_{i_1}\right]\theta^p g(t) +
$$

$$
+\left[\left(\gamma_1-1\right)\cdots\left(\gamma_p-1\right) - \lambda t\sum_{\substack{i_1,\cdots i_p=1\\ i_1\neq\cdots\neq i_p}}^{p+1}\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_p}\right]\theta g(t) \tag{8}
$$

De igual forma, se pueden obtener las ecuaciones diferenciales que satisfacen tanto la función generatriz de momentos como la función característica.

2.2 *Relación de recurrencia entre los momentos*

A partir de la ecuación diferencial (8) se obtiene la relación de recurrencia que verifican los momentos, que en este caso viene dada por la siguiente expresión:

$$b_{p+1}\mu'_{p+1+h}+b_p\mu'_{p+h}+\cdots+b_1\mu'_{1+h}=$$
$$+\sum_{m=0}^{h}\binom{h}{m}\left\{a_{p+1}\mu'_{p+1+m}+a_p\mu'_{p+m}+\cdots+a_1\mu'_m\right\},\ h\in Z^+ \tag{9}$$

donde a_i y b_i son los coeficientes polinomiales de $L(r)$ y $G(r+1)$ respectivamente, y que es únicamente de momentos al ser $b_0 = 0$.

Así, para distintos valores de h se obtienen relaciones como la siguiente donde $h = 0$ y $\lambda = 1$:

$$\left(b_p-a_p\right)\mu'_p+\cdots+\left(b_1-a_1\right)\mu-a_0=0$$

de forma que si se conocen los p-1 primeros momentos, se puede obtener el momento de orden p a partir de la expresión anterior, y de ahí los siguientes momentos. En ese sentido, el momento de orden r se define como:

$$\mu'_r=\left[\theta^r g(t)\right]_{t=1}$$

de donde las expresiones de la media y del momento no centrado de orden 2 son:

$$\mu=\frac{\lambda\prod_{i=1}^{p+1}\alpha_i}{\prod_{i=1}^{p}\gamma_i}\frac{{}_{p+1}F_p\left(\alpha_1+1,\cdots,\alpha_{p+1}+1;\gamma_1+1,\cdots,\gamma_p+1;\lambda\right)}{{}_{p+1}F_p\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_{p+1};\gamma_1,\cdots,\gamma_p;\lambda\right)}$$

$$\mu'_2=\mu+\frac{\lambda^2\prod_{i=1}^{p+1}(\alpha_i)_2}{\prod_{i=1}^{p}(\gamma_i)_2}\frac{{}_{p+1}F_p\left(\alpha_1+2,\cdots,\alpha_{p+1}+2;\gamma_1+2,\cdots,\gamma_p+2;\lambda\right)}{{}_{p+1}F_p\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_{p+1};\gamma_1,\cdots,\gamma_p;\lambda\right)} \tag{10}$$

También, mediante las derivadas de la función generatriz de probabilidad, se obtienen los momentos factoriales, cuya expresión general es:

$$\mu'_r=\mu+\frac{\lambda^r\prod_{i=1}^{p+1}(\alpha_i)_r}{\prod_{i=1}^{p}(\gamma_i)_r}\frac{{}_{p+1}F_p\left(\alpha_1+r,\cdots,\alpha_{p+1}+r;\gamma_1+r,\cdots,\gamma_p+r;\lambda\right)}{{}_{p+1}F_p\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_{p+1};\gamma_1,\cdots,\gamma_p;\lambda\right)} \tag{11}$$

y mediante los cuales es posible obtener los momentos no centrados a través de las relaciones que ligan los dos tipos de momentos.

El problema es que no existe un resultado general que nos permita obtener el valor de la función ${}_{p+1}F_p$, por lo que no se pueden calcular los valores explícitos de (10) o de (11), ni de la constante f_0. No obstante, se ha conseguido un resultado que se puede aplicar a una amplia clase de distribuciones dentro de esta familia, el cual presentamos a continuación.

2. 3 *Resultado parcial de sumación*

Vamos a enunciar ahora un teorema que nos permite obtener la suma de una amplia clase de funciones hipergeométricas

$$ {}_{p+1}F_p\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\gamma_p+n;\gamma_1,\cdots,\gamma_p;\lambda\right) $$

donde n es un número natural, y siempre que γ_p+n no sea el mayor valor entero negativo de los parámetros del numerador[1].

TEOREMA 1

Sea la función hipergeométrica ${}_{p+1}F_p\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\gamma_p+n;\gamma_1,\cdots,\gamma_p;\lambda\right)$ *en la que la diferencia entre uno de los parámetros del numerador y uno del denominador es un número natural n. Para aquellos casos en que la serie es infinita, esto es, ningún parámetro del numerador es entero negativo, se verifica que:*

$$ {}_{p+1}F_p\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\gamma_p+n;\gamma_1,\cdots,\gamma_p;\lambda\right)= $$

$$ =\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{(\alpha_1)_i\cdots(\alpha_p)_i\lambda^i}{(\gamma_1)_i\cdots(\gamma_p)_i}\times{}_pF_{p-1}\left(\alpha_1+i,\cdots\alpha_p+i;\gamma_1+i,\cdots,\gamma_{p-1}+i;\lambda\right) \qquad (12) $$

Demostración. Puede verse en Conde (1999).

El resultado anterior tiene utilidad práctica cuando se puede calcular el valor de la función hipergeométrica ${}_pF_{p-1}$, por lo que nos interesan funciones del tipo ${}_{p+1}F_p\left(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_2+n_1,\cdots,\gamma_p+n_{p-1};\gamma_1,\cdots,\gamma_p;\lambda\right)$ con n_j ; j = 1,..., p – 1 números naturales, de forma que se llega al siguiente corolario, aplicando el teorema 1 de forma recursiva,

COROLARIO 1.

En las condiciones del teorema anterior se tiene que:

$$ {}_{p+1}F_p\left(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_2+n_1,\cdots,\gamma_p+n_{p-1};\gamma_1,\cdots,\gamma_p;\lambda\right)= $$

[1] En este caso, al ser la suma finita, se puede obtener el resultado de manera exacta.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i_1=0}^{n_{p-1}} \binom{n_{p-1}}{i_1} \frac{(\alpha_1)_{i_1}(\alpha_2)_{i_1}(\gamma_2+n_1)_{i_1}\cdots(\gamma_{p-1}+n_{p-2})_{i_1}\lambda^{i_1}}{(\gamma_1)_{i_1}\cdots(\gamma_p)_{i_1}} \times \\
&\times \sum_{i_2=0}^{n_{p-2}} \binom{n_{p-2}}{i_2} \frac{(\alpha_1+i_1)_{i_2}(\alpha_2+i_1)_{i_2}(\gamma_2+i_1+n_1)_{i_2}\cdots(\gamma_{p-2}+i_{1+}n_{p-3})_{i_2}\lambda^{i_2}}{(\gamma_1+i_1)_{i_2}\cdots(\gamma_{p-1}+i_1)_{i_2}} \cdots \\
&\cdots \sum_{i_{p-2}=0}^{n_2} \binom{n_1}{i_{p-1}} \frac{(\alpha_1+i_1+\cdots+i_{p-2})_{i_{p-1}}(\alpha_2+i_1+\cdots+i_{p-2})_{i_{p-1}}\lambda^{i_{p-1}}}{(\gamma_1+i_1+\cdots+i_{p-2})_{i_{p-1}}(\gamma_2+i_1+\cdots+i_{p-2})_{i_{p-2}}} \times \\
&\times {}_2F_1(\alpha_1+i_1+\cdots+i_{p-1},\alpha_2+i_1+\cdots+i_{p-1};\gamma_1+i_1+\cdots+i_{p-1};\lambda) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Realmente este resultado es aplicable para funciones hipergeométricas cuya serie sea finita. Para ello, únicamente habrá que tener cuidado en que el parámetro mayor entero negativo sea α_1 ó α_2.

Se obtienen así resultados parciales de sumación al considerar $\lambda=1$ y $\lambda=1/2$, haciendo uso en el corolario 1 del Teorema de Gauss y del 2º Teorema de Gauss. Dichos resultados han sido implementados en Matlab consiguiendo de esta forma una herramienta bastante potente en el estudio de distribuciones generadas por funciones del tipo ${}_{p+1}F_p$, puesto que nos permite calcular las probabilidades y los momentos de dichas distribuciones.

Una vez presentadas estas distribuciones veamos los distintos métodos de estimación que estamos considerado.

3. MÉTODO DE LOS MOMENTOS

A partir de la relación de recurrencia (9) es teóricamente fácil estimar los parámetros mediante el método de los momentos. En general, el proceso de estimación para la familia ${}_{p+1}F_p$ con $\lambda=1$ se realiza en dos pasos:

- Planteamiento de un sistema lineal con $2p + 1$ ecuaciones (número de parámetros estimables), dadas por las $2p + 1$ primeras relaciones (9), en donde las incógnitas son los coeficientes de los polinomios $L(r)$ y $G(r+1)$.
- Obtención de los parámetros a través de las relaciones (6) y (7) con los coeficientes hallados anteriormente. De esta forma los parámetros γ_j-1 se obtienen como raíces del polinomio de grado x^p-$b_p x^{p-1}$+...+$(-1)^{p-1}b_2 x$ + $(-1)^p b_1$ y α_i son las raíces del polinomio x^{p+1} - $a_p x^p$ +...+ $(-1)^p a_1 x$ + $(-1)^{p-1} a_0$.

El problema es que cuanto mayor sea el número de parámetros a estimar, mayor es el orden de los momentos que aparecen y que es necesario que existan, lo cual limita el uso de este método.

En concreto, para la familia de distribuciones generadas por la ${}_2F_1$ el sistema de ecuaciones que hay que resolver se obtiene de (9) para $h = 0;\ 1;\ 2$ y $p = 1$:

$$\begin{aligned} m'_1 b_1 - m'_1 a_1 - a_0 &= 0 \\ m'_2 b_1 - (m'_2 + m'_1) a_1 - (m'_1 + 1) a_0 &= m'_2 \\ m'_3 b_1 - (m'_3 + 2m'_2 + m'_1) a_1 - (m'_2 + 2m'_1 + 1) a_0 &= m'_3 + m'_2 \end{aligned} \tag{14}$$

en donde se han reemplazado los momentos poblacionales por los momentos muestrales, m'_i. Se observa que en dicho sistema sólo aparecen momentos, a lo sumo, de orden 3.

De igual forma, para la familia de distribuciones generadas por la ${}_3F_2$ se tiene el siguiente sistema de cinco ecuaciones en donde se requiere la existencia de los momentos hasta orden 6:

$$\begin{aligned} & m'_2 b_2 + m'_1 b_1 - m'_2 a_2 - m'_1 a_1 - a_0 = 0 \\ & m'_3 b_2 + m'_2 b_1 - (m'_3 + m'_2) a_2 - (m'_2 + m'_1) a_1 - (m'_1 + 1) a_0 = m'_3 \\ & m'_4 b_2 + m'_3 b_1 - (m'_4 + 2m'_3 + m'_2) a_2 - (m'_3 + 2m'_2 + m'_1) a_1 - \\ & \qquad = -(m'_2 + 2m'_1 + 1) a_0 = 2m'_4 + m'_3 \\ & m'_5 b_2 + m'_4 b_1 - \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} \{ m'_{i+2} a_2 - m'_{i+1} a_1 - m'_i a_0 \} = \sum_{i=1}^{3} \binom{4}{i} m'_{i+2} \\ & m'_6 b_2 + m'_5 b_1 - \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} \{ m'_{i+2} a_2 - m'_{i+1} a_1 - m'_i a_0 \} = \sum_{i=1}^{4} \binom{4}{i} m'_{i+2} \end{aligned} \tag{15}$$

Este método presenta además el inconveniente de que los momentos de alto orden son muy sensibles a fluctuaciones muestrales.

4. MÉTODO MIXTO

Una posible alternativa consiste en considerar la ecuación en diferencias de partida, tal y como queda expresada en (4) en donde se relacionan los parámetros con las pendientes de la curva de probabilidad observada. Dichas relaciones también se pueden expresar como ecuaciones de un sistema lineal, que es más fácil de implementar, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \left[(r+1)^{p+1} + b_p r^p + \cdots + b_1 (r+1) \right] f_{r+1} - \\ & - \left(a_{p+1} r^{p+1} + a_p r^p + \cdots + a_1 r + a_0 \right) f_r = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Así, para estimar los parámetros en la familia ${}_2F_1$ se resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} n_1 b_1 - n_0 a_0 &= -n_1 \\ 2n_2 b_1 - n_1 a_1 - n_1 a_0 &= -4n_2 + n_1 \\ 3n_3 b_1 - 2n_2 a_1 - n_2 a_0 &= -9n_3 + 4n_2 \end{aligned} \tag{17}$$

donde n_r son las frecuencias observadas.

El inconveniente principal es que no se tiene en cuenta toda la información muestral, por lo que se han considerado sistemas compuestos por algunas ecuaciones que relacionan los momentos de menor orden, y otras con las frecuencias, de forma que tenemos en cuenta todas las observaciones y se necesita la existencia de momentos de menor orden.

De esta forma, particularizando a las situaciones más simples, en el caso de la familia ${}_2F_1$ podemos usar dos relaciones entre momentos y otra entre frecuencias, o bien una relación entre momentos y dos entre frecuencias. La primera situación corresponde a resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} m'_1 b_1 - m'_1 a_1 - a_0 &= 0 \\ m'_2 b_1 - (m'_2 + m'_1) a_1 - (m'_1 + 1) a_0 &= m'_2 \\ n_1 b_1 - n_0 a_0 &= -n_1 \end{aligned} \tag{18}$$

Para la familia ${}_3F_2$ podemos usar 4, 3, 2 ó 1 relación entre momentos y, simultáneamente, 1, 2, 3 ó 4 relaciones entre frecuencias. Así, por ejemplo, en el caso de 2 relaciones entre momentos y 3 relaciones entre frecuencias, el sistema de ecuaciones que hay que resolver es:

$$\begin{aligned} & m'_2 b_2 + m'_1 b_1 - m'_2 a_2 - m'_1 a_1 - a_0 = 0 \\ & m'_3 b_2 + m'_2 b_1 - (m'_3 + m'_2) a_2 - (m'_2 + m'_1) a_1 - (m'_1 + 1) a_0 = m'_3 \\ & n_1 b_2 + n_1 b_1 - n_0 a_0 = -n_1 \\ & 4n_2 b_2 + 2n_2 b_1 - n_1 a_2 - n_1 a_1 - n_1 a_0 = n_1 - 8n_2 \\ & 9n_3 b_2 + 3n_3 b_1 - 4n_2 a_2 - 2n_2 a_1 - n_2 a_0 = 8n_2 - 27n_3 \end{aligned} \tag{19}$$

5. MÉTODO DE LA MÍNIMA χ^2

Con objeto de elevar la eficiencia asintótica de los estimadores que acabamos de presentar, otros autores han empleado el método de estimación de la mínima χ^2 (Katti and Gurland, 1962a, 1962b), primeramente expuesto por Barankin and Gurland (1951). Estos estimadores, no obstante, se obtienen a través de la solución de ecuaciones no lineales.

El objetivo, por tanto, plantea el desarrollo de estimadores que tengan una alta eficiencia, pero que al mismo tiempo puedan ser obtenidos por un método relativamente simple como mínimos cuadrados ponderados. Esto produce estimadores que son soluciones de ecuaciones lineales, y para ello se ha utilizado esta misma técnica de la mínima χ^2.aplicada a ciertas funciones de las frecuencias (Gurland, 1965), o a los cumulantes factoriales (Hinz and Gurland, 1967).

Este método también se ha aplicado para extensiones de la familia de Katz, considerando momentos factoriales (Gurland and Tripathi, 1975 y 1977), para la distribución de Poisson Generalizada, utilizando momentos centrados (Tripathi and Gupta, 1984), para la familia de distribuciones Poisson-Katz, haciendo uso de los cumulantes factoriales (Tripathi *et al*, 1986) o para el modelo Beta-Binomial, también con momentos factoriales (Tripathi *et al*, 1994). En todos estos casos las distribuciones consideradas se pueden incluir dentro de la familia de distribuciones generadas por la función hipergeométrica ${}_2F_1$. Nuestra intención es aplicar este método de estimación a esta familia de distribuciones considerando así la situación más general. De esta forma no hay que elegir a priori alguna de esas distribuciones para estimar sus parámetros.

Sea $\theta' = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q)$ un vector de parámetros, de forma que sea posible obtener relaciones lineales de los mismos:

$$\tau = W\theta \tag{20}$$

donde . $\tau' = (\tau_1; \tau_2; ..., \tau_s)$ son funciones de momentos y/o frecuencias, y W_{sxq} es una matriz de constantes conocidas, con rango q y con s, número de estadísticos usados, mayor que q, número de parámetros a estimar. Sea $t' = (t_1; t_2; ..., t_s)$ el homólogo muestral de τ y Σ_t la matriz de covarianzas de t. Si $\hat{\Sigma}_t$ es un estimador consistente de Σ_t (para lo cual se reemplazan los parámetros que aparecen en los elementos de Σ_t por estimadores consistentes), entonces un estimador de mínima χ^2 de θ es obtenido minimizando

$$Q = n(t - W\theta)'\hat{\Sigma}_t^{-1}(t - W\theta) \tag{21}$$

con respecto a θ, cuya solución es:

$$\hat{\theta} = \left(W'\hat{\Sigma}_t^{-1}W\right)^{-1}\left(W'\hat{\Sigma}_t^{-1}t\right) \tag{22}$$

De Barankin (1951) el estimador $\hat{\theta}$ es el estimador asintóticamente eficiente dentro de la clase de estimadores regulares que sólo son funciones de t. Además los estimadores obtenidos usando una transformación uno a uno de los estadísticos en el método de la mínima χ^2 tienen las mismas propiedades asintóticas. De esta forma, se usarán funciones de los estadísticos que conduzcan a sistemas lo más simples posible.

Una de las cuestiones a decidir es el n´umero, *s*, de estad´ýsticos a usar. Se ha encontrado que los momentos (o funciones de ellos, como cumulantes) de alto orden (superior a tres) están sujetos a grandes fluctuaciones muestrales, por lo que no es conveniente que aparezcan en las relaciones consideradas.

En ese sentido las relaciones que involucran la primeras frecuencias son muy atractivas, y para muchas de las distribuciones discretas consideradas se ha encontrado que los estimadores con una mayor eficiencia aparecen al tomar algunas relaciones entre momentos y algunas otras entre probabilidades. En la práctica, es deseable usar relaciones entre momentos y/o probabilidades de bajo orden y tener *s* pequeño.

Además este procedimiento produce también un estadístico de bondad de ajuste $\hat{Q} = Q(\hat{\theta}) \rightarrow \chi^2(s-q)$, que presenta varias ventajas con respecto al estadístico χ^2 de Pearson, a saber (Hinz and Gurland, 1970):

1. No es necesario agrupar los datos en clases.
2. Los procedimientos de estimación empleados son relativamente simples.
3. La distribución asintótica es exáctamente χ^2.
4. Las probabilidades de la distribución considerada no necesitan ser calculadas.

Otros trabajos que muestran la potencia de este test en algunas distribuciones discretas usuales son los de Tripathi and Gurland (1978) y Bhalerao *et al* (1980).

Nos centraremos en las distribuciones generadas por la ${}_2F_1$, para lo que haremos uso de las ecuaciones (14) y (17). Si llamamos $\xi_r = \dfrac{f_{r+1}}{f_r}$, entonces las relaciones (17) quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \xi_0 b_1 - a_0 &= -\xi_0 \\ 2\xi_1 b_1 - a_1 - a_0 &= -4\xi_1 + 1 \\ 3\xi_2 b_1 - 2a_1 - a_0 &= -9\xi_2 + 4 \end{aligned} \tag{23}$$

Vamos a considerar que el vector de parámetros,θ , viene determinado por los coeficientes de los polinomios *G* y *L*, esto es, $\theta' = (b_1; a_1; a_0)$, de forma que γ, α_1 y α_0 se obtendrán de las estimaciones de éstos mediante las relaciones (6) y (7).

En primer lugar tenemos que determinar τ , así como la matriz *W*, y posteriormente calcularemos la matriz de covarianzas de t, Σ_t, con lo que podremos obtener las estimaciones a partir de la expresión (22).

5.1 *Cálculo de* τ

A partir de (14) y (23) obtenemos las s funciones τ con s = 6, del mismo modo que en Tripathi and Gurland (1977), esto es utilizando 3 relaciones entre momentos y otras 3 entre frecuencias. Como se observa sólo se han utilizado los momentos de orden inferior a 4.

Resolviendo el sistema formado por las dos primeras ecuaciones entre momentos, (14), y la primera entre cocientes de probabilidades, (23), se obtiene que:

$$\tau_1 = b_1 = d_1^{-1}\left\{\mu'_2\,\mu - \sigma^2\xi_0\right\}$$

donde $d_1 = \sigma^2\xi_0 - \mu^2$ y hemos notado por $\sigma^2 = \mu'_2 - \mu^2$ a la varianza.

Con las segunda y la tercera relación entre momentos y la primera entre cocientes de probabilidades, obtenemos:

$$\tau_2 = a_1 = d_2^{-1}\left\{\mu'_2\left[\mu'_3 + \mu'_2 + 2\xi_0\left(\mu'_2 + 2\mu + 1\right)\right] - \xi_0\left(\mu + 1\right)\left(3\mu'_3 + \mu'_2\right)\right\}$$

donde

$$d_2 = \mu'_3\,\mu - \mu'_2\left(2\mu'_2 + \mu\right) + \xi_0\left[\mu'_3\left(\mu + 1\right) - \mu'_2\left(\mu'_2 + \mu\right) + \sigma^2\right]$$

Utilizando las tres relaciones entre momentos, despejamos a_0:

$$\tau_3 = a_0 = d_3^{-1}\left\{2\mu\left(\mu'^2_2 - \mu'_3\,\mu\right)\right\}$$

con

$$d_3 = 2\mu'^2_2 - \mu\left(\sigma^2 + \mu'_3 + \mu\mu'_2\right)$$

Ahora utilizamos la primera y la tercera relaci´on entre momentos y la primera entre cocientes de probabilidades para despejar b_1:

$$\tau_4 = b_1 = d_4^{-1}\left\{\mu\left(2\mu'_3 + \mu'_2\right) + \xi_0\left(\mu\left(\mu'_2 + 2\mu\right) - \left(\mu'_3 + 2\mu'_2\right)\right)\right\}$$

donde

$$d_4 = \xi_0\left[\mu'_3 + 2\mu'_2 - \mu\left(\mu'_2 + 2\mu\right)\right] - \mu\left(2\mu'_2 + \mu\right)$$

De igual forma despejamos a_1 de la segunda relaci´on entre momentos y las dos primeras relaciones entre cocientes:

$$\tau_5 = a_1 = d_5^{-1}\left\{\mu'_2\left(2\xi_0 + 1 - 6\xi_1\right) - \xi_0\left(\mu + 1\right)\left(1 - 2\xi_1\right)\right\}$$

donde

$$d_5 = \left(\mu'_2 + \mu\right)\left(2\xi_1 - \xi_0\right) - \mu'_2 + \xi_0\left(\mu + 1\right)$$

Por ´ultimo con las tres relaciones entre cocientes de frecuencias se llega a:

$$\tau_6 = a_0 = d_6^{-1}\left\{2\xi_0\left(3\xi_2 - 2\xi_1 - 1\right)\right\}$$

con

$$d_6 = -3\xi_2 + 4\xi_1 - \xi_0$$

Así la matriz de constantes W es:

$$W' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Recordemos que t es el homólogo muestral de . por lo que los momentos poblacionales se sustituirán por los correspondientes momentos muestrales y los cocientes entre probabilidades por los correspondientes cocientes entre frecuencias muestrales.

5.2 *Cálculo de Σ_t*

Sea Σ la matriz de covarianzas de $(m'_1; m'_2; m'_3; p_0; p_1; p_2; p_3)$ donde m'_i es el i-ésimo momento no centrado muestral y p_j es la j-ésima frecuencia relativa muestral, y sean J_1 y J_2 los jacobianos de las siguientes transformaciones:

$$J_1 : (\mu'_1\, \mu'_2\, \mu'_3\, f_0 f_1 f_2 f_3) \to (\mu'_1\, \mu'_2\, \mu'_3\, \xi_0 \xi_1 \xi_2)$$

$$J_2 : (\mu'_1\, \mu'_2\, \mu'_3\, \xi_0 \xi_1 \xi_2) \to (\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5 \tau_6)$$

entonces:

$$\Sigma_t = J_2 J_1 \Sigma (J_2 J_1)' \tag{24}$$

Los elementos de J_1 , J_2 y Σ son:

$$J_1 = \frac{\partial(\mu'_1\, \mu'_2\, \mu'_3\, \xi_0 \xi_1 \xi_2)}{\partial(\mu'_1\, \mu'_2\, \mu'_3\, f_0 f_1 f_2 f_3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\xi_0}{f_0} & \frac{1}{f_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\xi_1}{f_1} & \frac{1}{f_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\xi_2}{f_2} & \frac{1}{f_2} \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \frac{\partial(\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5 \tau_6)}{\partial(\mu'_1\, \mu'_2\, \mu'_3\, \xi_0 \xi_1 \xi_2)} = \begin{bmatrix} \tau_1.1 & \tau_1.2 & 0 & \tau_1.4 & 0 & 0 \\ \tau_2.1 & \tau_2.2 & \tau_2.3 & \tau_2.4 & 0 & 0 \\ \tau_3.1 & \tau_3.2 & \tau_3.3 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_4.1 & \tau_4.2 & \tau_4.3 & \tau_4.4 & 0 & 0 \\ \tau_5.1 & \tau_5.2 & 0 & \tau_5.4 & \tau_5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_6.4 & \tau_6.5 & \tau_6.6 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\tau_1.1 = \frac{\partial \tau_1}{\partial \mu} = d_1^{-1}\{\mu'_2 + 2\mu\xi_0 + 2\tau_1\mu(\xi_0 + 1)\}$$

$$\tau_1.2 = \frac{\partial \tau_1}{\partial \mu'_2} = d_1^{-1}\{\mu - \xi_0(1 + \tau_1)\}$$

$$\tau_1.4 = \frac{\partial \tau_1}{\partial \xi_0} = d_1^{-1}\{-\sigma^2(1 + \tau_1)\}$$

$$\tau_2.1 = \frac{\partial \tau_2}{\partial \mu} = d_2^{-1}\{3\xi_0(\mu'_2 - \mu'_3) - \tau_2[\mu'_3 - \mu'_2 + \xi_0(\mu'_3 - \mu'_2 - 2\mu)]\}$$

$$\tau_2.2 = \frac{\partial \tau_2}{\partial \mu'_2} = d_2^{-1}\{\mu'_3 + 2\mu'_2 + \xi_0(4\mu'_2 + 3\mu + 1) - \tau_2[\xi_0(-2\mu'_2 - \mu + 1) - 4\mu'_2 - \mu]\}$$

$$\tau_2.3 = \frac{\partial \tau_2}{\partial \mu'_3} = d_2^{-1}\{\mu'_2 - \mu\tau_2 - \xi_0(\mu + 1)(3 + \tau_2)\}$$

$$\tau_2.4 = \frac{\partial \tau_2}{\partial \xi_0} = d_2^{-1}\{\mu'_2(2\mu'_2 + 3\mu + 1) - 3\mu'_3(\mu + 1) - \tau_2[\mu'_3(\mu + 1) - \mu'_2(\mu'_2 + \mu) + \sigma^2]\}$$

$$\tau_3.1 = \frac{\partial \tau_3}{\partial \mu} = d_3^{-1}\{2(\mu'^2_2 - 2\mu'_3\,\mu) + \tau_3[\sigma^2 + \mu'_3 + 2\mu(\mu'_2 - \mu)]\}$$

$$\tau_3.2 = \frac{\partial \tau_3}{\partial \mu'_2} = d_3^{-1}\{4\mu\mu'_2 + \tau_3[\mu(1 + \mu) - 4\mu'_2]\}$$

$$\tau_3.3 = \frac{\partial \tau_3}{\partial \mu'_3} = d_3^{-1}\mu(\tau_3 - 2\mu)$$

$$\tau_4.1 = \frac{\partial \tau_4}{\partial \mu} = d_4^{-1}\{2\mu'_3 + \mu'_2 + \xi_0(\mu'_2 + 4\mu) + \tau_4[\xi_0(\mu'_2 + 4\mu) + 2(\mu'_2 + \mu)]\}$$

$$\tau_4.2 = \frac{\partial \tau_4}{\partial \mu'_2} = d_4^{-1}\{\mu(1 + 2\tau_4) + \xi_0(\mu - 2)(1 + \tau_4)\}$$

$$\tau_4.3 = \frac{\partial \tau_4}{\partial \mu'_3} = d_4^{-1}\{2\mu - \xi_0(1 + \tau_4)\}$$

$$\tau_4.4 = \frac{\partial \tau_4}{\partial \xi_0} = d_4^{-1}(1 + \tau_4)\{\mu(\mu'_2 + 2\mu) - (\mu'_3 + 2\mu'_2)\}$$

$$\tau_5.1 = \frac{\partial \tau_5}{\partial \mu} = d_5^{-1}\{\xi_0(2\xi_1 - 1) - 2\tau_5\xi_1\}$$

$$\tau_5.2 = \frac{\partial \tau_5}{\partial \mu'_2} = d_5^{-1}\{2\xi_0 + 1 - 6\xi_1 + \tau_5(\mu'_2 - 1)\}$$

$$\tau_5.4 = \frac{\partial \tau_5}{\partial \xi_0} = d_5^{-1}\{2\mu'_2 + (\mu+1)(2\xi_1 - 1) + \tau_5(\mu'_2 - 1)\}$$

$$\tau_5.5 = \frac{\partial \tau_5}{\partial \xi_1} = d_5^{-1}\{-6\mu'_2 + 2\xi_0(\mu+1) - 2\tau_5(\mu'_2 + \mu)\}$$

$$\tau_6.4 = \frac{\partial \tau_6}{\partial \xi_0} = d_6^{-1}\{2(3\xi_2 - 2\xi_1 - 1) + \tau_6\}$$

$$\tau_6.5 = \frac{\partial \tau_6}{\partial \xi_1} = -4d_6^{-1}(\tau_6 + \xi_0)$$

$$\tau_6.6 = \frac{\partial \tau_6}{\partial \xi_2} = 3d_6^{-1}(\tau_6 + 2\xi_0)$$

y los elementos de Σ pueden ser obtenidos como sigue:

$$Cov(m'_i, m'_j) = \frac{1}{n}(\mu'_{i+j} - \mu'_i \mu'_j)$$

$$Cov(p_i, p_j) = -\frac{f_i f_j}{n} \quad i \neq j$$

$$Var(p_i) = -\frac{f_i(1-f_i)}{n}$$

$$Cov(m_i, p_j) = -\frac{1}{n}(j^i - \mu'_i) f_j$$

Como comentábamos, $\hat{\Sigma}_t$ es un estimador consistente de Σ_t, por lo que se reemplazan los parámetros poblaciones por estimadores consistentes que no son otros que los momentos muestrales y las frecuencias muestrales. Hay que señalar que en el cálculo de $\hat{\Sigma}_t$ aparecen momentos de orden 6, por lo que para distribuciones *overdispersas* convendría tomar menos relaciones entre momentos. En ese caso se pueden considerar 2 relaciones entre momentos y 4 entre frecuencias.

BIBLIOGRAFÍA

BARANKIN, E.W. and GURLAND, J. (1951). On asymptotically normal, efficient estimators: I. *University of California Publications in Statistics.* 1, 89-129.

BHALERAO, N.R., GURLAND, J. and TRIPATHI, R.C. (1980). A method of increasing power of a test for the Negative Binomial and Neyman Type A distributions. *Journal of the American Statistical Association.* Vol. 75, num. 372, 934-938.

BOWMAN, K.O., SHENTON, L.R. and KASTENBAUM, M.A. (1991). Discrete Pearson Distributions, Oak Ridge National Lab. Technical Report TM-11899 Oak Ridge, Tennessee.

CONDE, A. (1999). *Estudio de familias de distribuciones discretas generadas por funciones hipergeométricas*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

DACEY, M.F. (1972). A family of discrete probability distributions defined by thegeneralized hypergeometric series. *Sankhya*, serie B, 34, 243-250.

GURLAND, J. (1965). A method of estimation for some generalized Poisson distributions. *Proceedings of the International Symposium on Classical and Contagious Discrete Distributions, Montreal.* Pergamon Press.

GURLAND, J. and TRIPATHI, R.C. (1975). Estimation of parameters on some extensionsof the Katz family of discrete distributions involving hypergeometric functions. *A Modern Course on Statistical Distributions in Scientific Work* 1, 59-82.

GUTIÉRREZ-JÁIMEZ, R. and RODRÍGUEZ-AVI, J. (1997). Family of Pearson Discrete Distributions Generated by the Univariate Hypergeometric function $3F2(\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 ; \gamma_1 , \gamma_1 ;\lambda)$ Applied Stochastics Models and Data Analysis. 13, 115-125.

HINZ, P. and GURLAND, J. (1967). Simplified techniques for estimating parameters of some generalized Poisson distributions. *Biometrika.* 54, 555-566.

HINZ, P. and GURLAND, J. (1970). A Test of fit for the Negative Binomial and other contagious distributions. *Journal of the American Statistical Association.* 65, 887-903.

IRWING, J.O. (1975). The generalized Waring distribution. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*. 138, 18-31 (part I), 204-227 (part II), 374-378 (part III).

JOHNSON, N.L., KOTZ, S. and KEMP A.W. (1992). *Univariate Discrete Distributions.* Wiley, New York. Second edition.

KATTI, S.K. and GURLAND, J. (1961). The Poisson Pascal distribution. *Biometrics.* 17, 527-538.

KATTI, S.K. and GURLAND, J. (1962a). Some methods of estimation for the Poisson Binomial distribution. *Biometrics.* 18, 42-51.

KATTI, S.K. and GURLAND. J. (1962b). E.ciency of certain methods of estimation for the Negative Binomial and the Neyman Type A distributions. *Biometrika.* 49, 215-226.

ORD, J.K. (1972). Families of frecuency distributions. Gri.n, London.

RODRÍGUEZ-AVI, J., GUTIÉRREZ-JÁIMEZ, R. and CONDE-SÁNCHEZ, A. (1999) Discrete Distributions Generated by the Hypergeometric Function 4*F*3. In Applied Stochastics Models and Data Analysis, Proc. IX International Symp. Lisboa (ed H Barcelar-Nicolau, F. Costa-Nicolau and J. Jansen) pp 200-205. I.N.E. Portugal.

RODRÍGUEZ-AVI, J., GUTIÉRREZ-JÁIMEZ, R. and CONDE-SÁNCHEZ, A. (2000). Study of a wide class of univariate discrete distributions generated by the hypergeometric function 3*F*2. Submitted to Theory of Probability and Its Applications.

TRIPATHI, R.C. and GURLAND, J. (1977). A general family of discrete distributions with hypergeometric probabilities. *Journal of the Royal Statistical Society, series B*. Vol. 39, num. 3, 349-356.

TRIPATHI, R.C. and GURLAND, J. (1978). Test of hypothesis in some families of discrete distributions. *Bulletin of the Greek Mathematical Society*. 19, 217-239.

TRIPATHI, R.C. and GUPTA, R.C. (1984). Statistical inference regarding the Generalized Poisson distribution. *Sankhya, Series B*. Vol. 46, num. 2, 166-173.

TRIPATHI, R.C., GURLAND, J. and BHALERAO, N.R. (1986). A unified approach to estimating parameters in some Generalized Poisson distributions. *Communications in Statistics: Theory and Methods*. Vol. 15, num. 3, 1017-1034.

TRIPATHI, R.C., GUPTA, R.C. and GURLAND, J. (1994). Estimation of parameters in the Beta Binomial model. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. Vol. 46, num. 2, 317-331.

XEKALAKI, E. (1983). The Univariate Generalized Waring distribution in relation to accident theory: proneness, spells or contagion?. *Biometrics*. 39, 887-895.